**Analiza Matematyczna 1**
**rok akademicki 2023/24**
**Lista 2**

**1.** Sprawdzić ograniczoność (z góry, z dołu) ciągów liczbowych

(a) $x_n = \sqrt{4n^2 - n} - 2n$;

(b) $y_n = \dfrac{(n+1)!}{n! + 100}$;

(c) $z_n = \dfrac{1}{n^2+1} + \dfrac{2}{n^2+2} + \dfrac{3}{n^2+3} + \cdots + \dfrac{n}{n^2+n}$.

**2.** Sprawdzić monotoniczność ciągów liczbowych

(a) $x_n = 5^n - 3^n - 2^n$;

(b) $y_n = \dfrac{(n!)^3}{(3n)!}$;

(c) $z_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \dfrac{1}{n+3} + \cdots + \dfrac{1}{n+n}$.

**3.** Korzystając z definicji zbieżności ciągu uzasadnić następujące równości:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-3n}{1+n} = -3$; (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n}{n^2+1} = 0$; (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2^n} = 0$;

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2-3n+1}{2n^2+n+1} = \dfrac{1}{2}$; (e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n}+1}{n} = 0$.

**4.** Obliczyć granice

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3+2n^2+1}{n-4n^3}$; (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n^{20}+1)^3}{(n^3+n+2)^{20}}$; (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n^2+1)n!+1}{(2n+1)(n+1)!}$;

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+4n+1} - \sqrt{n^2+2n}\right)$; (e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^3+1}}{\sqrt[3]{n^5+2}+3}$; (f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+3+\ldots+(2n-1)}{2+4+\ldots+2n}$.

**5.** Udowodnić, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$.

**6.** Dane są dwa ciągi, $(a_n)$ i $(b_n)$. Załóżmy, że $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$. Czy z tego wynika, że co najmniej jeden z ciągów $(a_n)$, $(b_n)$: a) ma granicę, b) jest ograniczony?

**7.** Załóżmy, że $\lim_{n\to\infty} a_n^2 = 0$. Co można powiedzieć o ciągu $(a_n)$?

To samo pytanie, gdy wiadomo, że $\lim_{n\to\infty} a_n^2 = 1$.

**8.** O ciągu $(x_n)$ wiadomo, że $\lim_{n\to\infty} x_n^2 = 1$ oraz $\lim_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n) = 0$. Czy $(x_n)$ musi być zbieżny?

**9.** Niech $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = g > 0$ i $\lambda \in (0, g)$. Wykazać, iż istnieje takie $n_0$, że $x_n > \lambda$ dla dowolnego $n > n_0$. Sformułować podobne twierdzenie, gdy $g < 0$.

**10.** Załóżmy, że $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = g \in \mathbb{R}$ i $x_n \geqslant 0$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$. Wykazać, że

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{g}$.

**11.** Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach obliczyć granice ciągów

(a) $a_n = \dfrac{4n + (-1)^n}{5n + 2\sin(n)}$; (b) $b_n = \dfrac{[nx]}{n}$ $(x \in \mathbb{R})$; (c) $c_n = \sqrt[n]{1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}}$;

(d) $d_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$; (e) $e_n = \dfrac{1}{n^2+1} + \dfrac{2}{n^2+2} + \cdots + \dfrac{n}{n^2+n}$;

(f) $f_n = \sqrt[n]{4^{2n+1} + 3^{3n+2}}$.

**12.** Obliczyć granice ciągów o wyrazach ogólnych postaci

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n, \quad \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n, \quad \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n, \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}.$$

**13.** Pokazać, że jeśli ciąg liczbowy $(n_k)$ ma wyrazy dodatnie i $\lim\limits_{k\to\infty} n_k = \infty$, to

$$\lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k} = e.$$

**14.** Obliczyć granice ciągów o wyrazach ogólnych postaci

$$\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n+1}, \quad \left(\frac{5n+2}{5n+1}\right)^{15n+3}, \quad \left(\frac{n^2+2}{n^2}\right)^{4n^2}, \quad \left(\frac{2n-1}{n+1}\right)^{n+1}, \quad \left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^{n+1}.$$

**15.** Obliczyć granicę ciągu liczbowego $(x_n)$, jeśli

(a) $x_n = \sqrt[3]{n^2 + n^3} + \sqrt[3]{n^2 - n^3}$; (b) $x_n = \sqrt[4]{n^4 + n^3} - n$; (c) $x_n = \sqrt[2n+1]{3n + 2}$;

(d) $x_n = \dfrac{99^n - 2^n}{100^n - 99^n}$; (e) $x_n = 5^n - 3^n - 2^n$; (f) $x_n = \sqrt[n]{5^n - 3^n - 2^n}$;

(g) $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$; (h) $x_n = \log_{2^n+1}(4^n + 1)$; (i) $x_n = \dfrac{n+1}{n^2(\ln(n+1) - \ln n)}$;

(j) $x_n = \sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)$.

**16.** Wykazać, że poniższe ciągi są monotoniczne i ograniczone

(a) $x_n = \dfrac{n!}{n^n}$;

(b) $y_0 > 0$ i $y_n = \dfrac{y_{n-1}}{a + y_{n-1}}$ dla $n \geqslant 1$, $a > 1$,

Oblicz ich granice, jeśli są zbieżne. To samo, ale bez obliczenia granicy, dla ciągu

(c) $z_n = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \cdots + \dfrac{1}{n!}$.

**17.** Wykazać, że $(x_n)$ jest ciągiem zbieżnym i oblicz jego granicę, jeśli

(a) $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \sqrt{\dfrac{5}{16} + x_n}$ dla $n \geqslant 1$;

(b) $x_1 > 0$, $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}(x_n + \dfrac{1}{x_n})$ dla $n \geqslant 1$.

**18.** Sprawdzić, czy ciąg liczbowy $(x_n)$ jest ciągiem Cauchy'ego, jeśli

(a) $x_n = \dfrac{\cos x}{1 \cdot 2} + \dfrac{\cos 2x}{2 \cdot 3} + \cdots + \dfrac{\cos nx}{n \cdot (n+1)}$ $(x \in \mathbb{R})$;

(b) $x_n = \frac{1}{\log_2 2} + \frac{1}{\log_2 3} + \cdots + \frac{1}{\log_2 n}$ $(n \geq 2)$;

(c) $x_n = a_0 + a_1 q + a_2 q^2 + \cdots + a_n q^n$, przy czym $|q| < 1$ oraz $\exists_{M \in \mathbb{R}} \forall_{k \in \mathbb{N}}\ |a_k| \leqslant M$.

**19.** Wyznaczyć granice górne i dolne ciągów liczbowych:

(a) $x_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1 + (-1)^n}{2}$;

(b) $y_n = n \sin \frac{n\pi}{2}$;

(c) $z_n = \left(1 + (-1)^n \cdot \frac{1}{n}\right)^{(-1)^n n}$.

**20.** Niech $(a_n)$ będzie ciągiem liczbowym i niech $b_k = a_{2k}$, $c_k = a_{2k-1}$ dla $k \in \mathbb{N}$. Wykazać, że jeśli $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = \lim\limits_{k\to\infty} c_k = g$ ($g$ jest tu granicą właściwą lub niewłaściwą), to $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$.

**21.** Niech $(a_n)$ będzie ciągiem monotonicznym zawierającym podciąg $(a_{n_k})$ taki, że $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = g$. Wykazać, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$.

**22⋆.** Załóżmy, że $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n > -\infty$ i $\limsup\limits_{n\to\infty} b_n > -\infty$.

Udowodnić, że $\limsup\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq \limsup\limits_{n\to\infty} a_n + \limsup\limits_{n\to\infty} b_n$.

Podać przykład ciągów $(a_n)$ i $(b_n)$, dla których zachodzi nierówność ostra. Sformułować analogiczną własność granic dolnych.