Analiza Matematyczna 1
rok akademicki 2023/24
Lista 3

1. Odpowiednio przekształcając wzory, znaleźć funkcję odwrotną do zadanej:

a) $f(x) = x^2 - 2x$, $x > 1$, b) $g(x) = \dfrac{2^x}{1+2^x}$, c) $h(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

2. Dana jest funkcja $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. Obliczyć: a) $f_2(x) = (f \circ f)(x)$ czyli $f(f(x))$, b) $f_3(x) = (f \circ f \circ f)(x)$.

3. Określmy

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, \text{ gdy } |x| \le 1, \\ 0, \text{ gdy } |x| > 1, \end{cases} \qquad \psi(x) = \begin{cases} 2 - x^2, & \text{gdy } |x| \le 2, \\ 2, & \text{gdy } |x| > 2. \end{cases}$$

Narysować wykresy funkcji:

a) $(\psi \circ \phi)(x)$, b) $(\phi \circ \psi)(x)$.

4. Naszkicować wykres funkcji: a) $f(x) = \arcsin(\sin x)$, b) $g(x) = \sin(\arcsin x)$.

5. Sprawdzić za pomocą definicji Heinego, oraz osobno za pomocą definicji Cauchy'ego, że

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{1+x} = 1$, b) $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{4+x} = 2$.

6. Uzasadnić, że podane granice nie istnieją:
a) $\lim\limits_{x\to\infty} \sin\sqrt{x}$, **b)** $\lim\limits_{x\to 0^-} \cos\frac{1}{x^2}$.

7. Zbadać, obliczając granice jednostronne, czy istnieją granice:
a) $\lim\limits_{x\to 2} \lfloor x^2 \rfloor$, **b)** $\lim\limits_{x\to 0} 2^{\frac{1}{x^3}}$, **c)** $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{|x-2|}$,
d) $\lim\limits_{x\to -1} \operatorname{sgn}\, [x\,(1-x^2)]^7$, **e)** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\lfloor x \rfloor}{x}$, **f)** $\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$,
g) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2}{x-3}$, **h)** $\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{sgn} x$.

8. Korzystając z twierdzeń o arytmetyce granic funkcji, obliczyć granice:
a) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^4-1}$, **b)** $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^6-1}{1-x^2}$, **c)** $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2-5x+4}{x(x-5)}$,
d) $\lim\limits_{x\to 6} \frac{\sqrt{x-2}-2}{x-6}$, **e)** $\lim\limits_{x\to 64} \frac{\sqrt[3]{x}-4}{\sqrt{x}-8}$, **f)** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{2x}$,
g) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\sqrt{x^2+1} + x\right)$, **h)** $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt[3]{1-x^3}}$, **i)** $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2^x+1}{3^x+2}$,
j) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\operatorname{tg}^2 x+1}{\operatorname{tg}^2 x+5}$, **k)** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{1-\cos x}$, **l)** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{tg} x - \frac{1}{\cos x}\right)$.

9. Korzystając z twierdzenia o trzech funkcjach, uzasadnić równości:

e) $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}\cos\frac{1}{x^2} = 0$, **a)** $\lim\limits_{x\to 0} x^3 \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = 0$, **d)** $\lim\limits_{x\to 2} \lfloor x\rfloor \sin(x\pi) = 0$;

c) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{2^{-x}+\sin x}{2^{-x}+\cos x} = 1$, **f)** $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2+\sin x}{x^2} = 0$, **g)** $\lim\limits_{x\to -\infty} e^{x+\sin^2 x} = 0$,

h) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\lfloor 3e^x\rfloor+2}{\lfloor 2e^x\rfloor+1} = \frac{3}{2}$, **i)** $\lim\limits_{x\to 0} x^3 \left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor = 0$, **j)** $\lim\limits_{x\to\infty} \left[\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)-\sin x\right] = 0$.

10. Korzystając z twierdzenia o dwóch funkcjach, uzasadnić równości:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\lfloor x^2+1\rfloor}{\lfloor x\rfloor} = \infty$, **b)** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2+\sin\frac{1}{x}}{x^2} = \infty$, **c)** $\lim\limits_{x\to 0^-} \left(3-\cos\frac{1}{x}\right)\operatorname{ctg} x = -\infty$.

11. Korzystając z granic podstawowych wyrażeń nieoznaczonych, obliczyć granice:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^2 3x}{x^2}$, **b)** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{3}}$, **c)** $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{x}}{\operatorname{tg}\frac{2}{x}}$,

d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos 3x-\cos 7x}{x^2}$, **e)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 5x}{\cos 3x}$, **f)** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{3x}-1}{\sin 2x}$,

g) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}{x}$, **h)** $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{\ln(1+2^x)}{3^x}$, **i)** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[6]{1-x}}{x}$.

12. Obliczyć granice:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$, b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}{x^2}$, c) $\lim\limits_{x\to 1} (1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2}x$.

13. Niech

$$f(x) = \begin{cases} 4x, & \text{gdy } x\in\mathbb{Q}, \\ -x, & \text{gdy } x\notin\mathbb{Q}. \end{cases}$$

Czy istnieją granice: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$?

14. O funkcji $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ wiemy, że jest rosnąca i $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\dfrac{1}{n}\right) = 0$. Czy stąd wynika, że $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$?

15. Wykazać, że jeśli $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ oraz $|g(x)| < M$ w przedziale otwartym, zawierającym x_0, to $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0$.

16. Wiedząc, że

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e,$$

obliczyć granice

(a) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$,

(b) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$.