Analiza Matematyczna 1
rok akademicki 2023/24
Lista 4

1. a) Sformułować twierdzenie Weierstrassa.

b) Podać przykład funkcji ciągłej na przedziale otwartym, która nie przyjmuje swoich kresów.

c) Podać przykład funkcji nieciągłej na przedziale domkniętym, która nie przyjmuje swoich kresów.

d) Podać przykład funkcji ciągłej na przedziale otwartym, która przyjmuje swoje kresy.

e) Podać przykład funkcji nieciągłej na przedziale otwartym, która przyjmuje swoje kresy.

2. a) Sformułować twierdzenie Darboux.

b) Sformułować własność Darboux.

c) Czy funkcja ciągła na przedziale otwartym ma własność Darboux?

3. Zbadać ciągłość funkcji ($p \in \mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{R}$)

(a) $f(x) = \begin{cases} x^p \sin x^2 & \text{dla } x \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0; \end{cases}$

(b) $g(x) = \begin{cases} x \text{ dla } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 \text{ dla } x \notin \mathbb{Q}; \end{cases}$

(c) $h(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt[5]{x}-1}{\sqrt{x}-1} & \text{dla } x \neq 1, \\ a & \text{dla } x = 1. \end{cases}$

4. a) Pokazać, że $f(x) = |x|$ jest ciągła na $\mathbb{R}$.

b) Pokazać, że jeśli $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą, to $|f|\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ też jest funkcją ciągłą.

5. Korzystając z poprzedniego zadania wywnioskować twierdzenie: Jeśli funkcje $f, g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ są funkcjami ciągłymi, to funkcja $h\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ określona następującym warunkiem $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$, $x \in (a,b)$, jest również ciągła.

6. Załóżmy, że funkcje $f, g : I \to \mathbb{R}$, I - dowolny przedział, są ciągłe i $f(x) = g(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{Q} \cap I$. Wykazać, że $f(x) = g(x)$ dla dowolnego $x \in I$.

7*. Udowodnić, że funkcja liniowa $f(x) = ax$, $x \in \mathbb{R}$, jest jedyną funkcją ciągłą na $\mathbb{R}$ spełniającą warunki $f(1) = a$ oraz $f(x+y) = f(x) + f(y)$ dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$. Wskazówka. Najpierw uzasadnić, że $f(0) = 0$, $f(-x) = -f(x)$ dla $x \in \mathbb{R}$, $f(1/m) = a/m$ dla $m \in \mathbb{N}$, $f(n/m) = an/m$ dla $n, m \in \mathbb{N}$.

8. Niech $f : [a,b] \to [a,b]$ będzie funkcją ciągłą. Pokazać, że istnieje punkt $c \in [a,b]$ taki, że $f(c) = c$.

9. Niech $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą i niech $f(x) > 0$ dla wszystkich $x \in [a,b]$. Dowieść, że istnieje liczba rzeczywista $p > 0$ taka, że $f(x) > p$ dla każdego $x \in [a,b]$.

10. Niech $f : [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Załóżmy, że istnieje skończona granica $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Udowodnić, że funkcja f jest ograniczona.

11. Uzasadnić, że podane równania mają jednoznaczne rozwiązania we wskazanych przedziałach:

a) $x^3 + 6x - 2 = 0$, $(0,1)$, b) $x \sin x = 7$, $(2\pi, 5\pi/2)$, c) $1 = \frac{\sin x}{2} + x$, $(0, \pi/2)$,

d) $x^{100} + x - 1 = 0$, $(1/2, 1)$ e) $3^x + x = 3$, $(0,1)$, f) $x2^x = 1$, $(0,1)$.

12. Wyznaczyć rozwiązania równań **a)**, **d)** i **f)** z poprzedniego zadania z dokładnością $0{,}125$.

13*. Czy równanie $4^{\frac{1}{x}} = 2^{\frac{1}{x}} + 2^x + 1$ ma dodatnie pierwiastki?

14*. Sprawdzić czy funkcja f jest ciągła jednostajnie na podanym przedziale, jeśli

(a) $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$, $(0,1]$;

(b) $f(x) = \sqrt{x}$, $[0,+\infty)$.

15*. Niech $f\colon D \to \mathbb{R}$, D - dowolny przedział, będzie funkcją jednostajnie ciągłą na D. Pokazać, że jeśli (x_n) jest ciągiem Cauchy'ego punktów zbioru D, to $(f(x_n))$ też jest ciągiem Cauchy'ego.

16*. Funkcja $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ jest jednostajnie ciągła na $(0,\infty)$. Czy stąd wynika istnienie granic $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ i $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$?