Analiza Matematyczna 1
rok akademicki 2023/24
Lista 5

1. Znajdź asymptoty funkcji

a) $f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2}$,

b) $g(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x^2-9}}$,

c) $h(x) = \frac{\sin(x)}{x}$.

2. Oblicz z definicji pochodne podanych funkcji we wskazanych punktach:

a) $f(x) = x^3$, $x_0 = 2$, b) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 0$ oraz $x_0 = 1$, c) $f(x) = \frac{1}{x+1}$, $x_0 = 0$,

d) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $x_0 = 3$.

3. Oblicz pochodne funkcji (w tych punktach, w których pochodne istnieją):

a) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$, b) $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$, c) $f(x) = 2^{-\sin(3x^3+3)}$,

d) $f(x) = \log_x 3$, e) $f(x) = \ln\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$, f) $f(x) = \mathrm{arctg}\frac{1-x}{1+x}$,

g) $f(x) = \log_{2x}(x^2 + 2^x)$, h) $f(x) = x^{\sqrt{x}}$, i) $f(x) = 2\mathrm{arctg}x - \arcsin\frac{2x}{1+x^2}$.

4. Korzystając z pochodnych, wyznacz przedziały monotoniczności funkcji:

a) $f(x) = x^3 - 30x^2 + 225x$, **b)** $f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2$,

c) $f(x) = 4x + \frac{1}{x}$, **d)** $f(x) = \frac{x^3}{3-x^2}$,

e) $f(x) = x - 3\sqrt[3]{x}$, **f)** $f(x) = xe^{-3^x}$,

g) $f(x) = x\ln^2 x$, **h)** $f(x) = \frac{x}{\ln x}$,

i) $f(x) = \frac{1}{x\ln x}$, **j)** $f(x) = x^2e^{-x^2}$.

5. Znajdź wszystkie ekstrema lokalne podanych funkcji:

a) $f(x) = x^3 - 4x^2$, **b)** $f(x) = x + \frac{1}{x}$,
c) $f(x) = \frac{2x^2-1}{x^4}$, **d)** $f(x) = \frac{1}{x^2-x}$,
e) $f(x) = x - \sqrt{x}$, **f)** $f(x) = |x^2 - 5x - 6|$,
g) $f(x) = x \ln x$, **h)** $f(x) = \sqrt{3x - x^3}$,
i) $f(x) = 2\mathrm{arctg}\, x - \ln(1 + x^2)$, **j)** $f(x) = \mathrm{arctg}\, x + \mathrm{arcctg}\, x$.

6. Znajdź wartości najmniejsze i największe podanych funkcji na wskazanych przedziałach:

a) $u(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x, \quad [1,\, 5]$, **b)** $v(x) = \mathrm{arctg}\frac{1-x}{1+x}, \quad [0,\, 1]$,
c) $w(x) = (x-3)^2 e^{|x|}, \ [-1,\, 4]$, **d)** $z(x) = 1 - |9 - x^2|, \quad [-5,\, 1]$,
e) $g(x) = x - 2\sqrt{x}, \quad [0,\, 5]$, **f)** $h(x) = 2\sin x + \sin 2x, \quad [0,\, \frac{3}{2}\pi]$.

7. Korzystając z reguły de'l'Hospitala, oblicz:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^m - 1}{x^n - 1}$, **b)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{x^3}$, **c)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cosh x - 1}{\cos x - 1}$,
d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\cos(5x)}{\ln\cos(3x)}$, **e)** $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln\sin x}{\ln \mathrm{tg}\, x}$, **f)** $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x^12)$,
g) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{1/x}$, **h)** $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1}\right)$, **i*)** $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sin x}$.

8. Które spośród poniższych funkcji są wypukłe (wklęsłe) na całej swojej dziedzinie?

a) $f(x) = x^2$, b) $f(x) = e^x$, c) $f(x) = \ln x$, d) $f(x) = \sin x$.

9. Korzystając z wypukłości odpowiednich funkcji wykaż, że zachodzą nierówności:

a) $\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2 \le \dfrac{x^2+y^2}{2}$ dla wszystkich $x,\, y \in \mathbb{R}$, b) $e^{\frac{x+y}{2}} \le \dfrac{e^x + e^y}{2}$ dla wszystkich $x,\, y \in \mathbb{R}$, c*) $x\ln x + y\ln y + z\ln z \ge (x+y+z)\ln\frac{x+y+z}{3}$ dla wszystkich $x,\, y,\, z > 0$.

10*.** Wykaż, że funkcja f ciągła na przedziale $(a,\, b)$ i spełniająca warunek: dla wszystkich $x,\, y \in (a,\, b)$ zachodzi nierówność $f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \le \dfrac{1}{2}f(x) + \dfrac{1}{2}f(y)$, jest wypukła.

11. Zbadaj funkcję $f(x)$, tzn. określ dziedzinę, asymptoty, przedziały monotoniczności i ekstrema lokalne, przedziały wypukłości i wklęsłości oraz punkty przegięcia wykresu:

a) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, b) $f(x) = -x^3 + 4x - 3$, c) $f(x) = xe^{-2x}$, d) $f(x) = \arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$.