Analiza Matematyczna 1
rok akademicki 2023/24
Lista 6

1. Załóżmy, że istnieją stałe $0 < M \in \mathbb{R}$ i $a \in \mathbb{R}$ takie, że $\forall_{x \geqslant a}\ f'(x) \geqslant M$. Korzystając z twierdzenia Lagrange'a dla funkcji f na przedziale $[a, x]$ wykazać, że $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

2. Skorzystać z twierdzenia Lagrange'a i udowodnić nierówności

(a) $\dfrac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$, gdy $x > 0$;

(b) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\alpha} < \dfrac{\operatorname{tg}\beta}{\beta}$, gdy $0 < \alpha < \beta < \dfrac{\pi}{2}$.

3. Znaleźć $f^{(n)}(x)$, jeśli

(a) $f(x) = \cos(ax)$;

(b) $f(x) = \cos^2 x$.

4. Napisać wzór Maclaurina z resztą R_n dla funkcji:
a) $f(x) = \ln(1+x)$, $n = 5$, **b)** $f(x) = (1+x)^{1/2}$, $n = 4$, **c)** $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $n = 5$.

5. Oszacować dla $|x| \leq 1$ resztę we wzorze otrzymanym w punkcie c) poprzedniego zadania.

6. Wyznaczyć wzór Taylora dla funkcji $f(x) = e^{2\sqrt{x}}$ z resztą R_1, R_2 i R_3 oraz punktem bazowym $x_0 = 2$.

7. Wyznaczyć wzór Taylora dla funkcji

$$f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

z punktem bazowym $x_0 = 1$ i z n-tą resztą.

8. Ocenić błąd jaki popełniamy przyjmując, że

(a) $\sin x \approx x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120}$ dla $|x| \leqslant 0,1$;

(b) $\cos x \approx 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24}$ dla $|x| \leqslant 0,5$.

9. Korzystając z wzoru Taylora funkcji $f(x) = \sqrt{(x+1)^3}$, udowodnić nierówność

$$\sqrt{(x+1)^3} > 1 + \frac{3x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{x^3}{16} \quad \text{dla} \quad x > 0.$$

10. Niech f będzie funkcją wypukłą na przedziale I, a g funkcją wypukłą i rosnącą na przedziale J i $f(I) \subset J$. Zakładamy ponadto, że obie funkcje są dwukrotnie różniczkowalne. Wykazać, że funkcja złożona $g \circ f$ jest wypukła na I.

11. Znaleźć wymiary puszki do konserw w kształcie walca o objętości $V = 128\pi \mathrm{cm}^3$ do sporządzenia której zużyje się najmniej blachy.