

Analiza Matematyczna 1
rok akademicki 2023/24
Lista 7

1. Wyznaczyć całki nieoznaczone

a) $\int (x^3 + \sqrt[3]{x})\sqrt{x}\sqrt{x} dx$, b) $\int \frac{a^{3x} - 1}{a^x - 1} dx$ ($0 < a \neq 1$),
c) $\int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x} dx$, d) $\int \operatorname{ctg}^2 x dx$.

2. Całkując przez części, wyznaczyć całki nieoznaczone

a) $\int x e^{-3x} dx$, b) $\int x^2 e^x dx$, c) $\int \ln x dx$,
d) $\int \ln^2 x dx$, e) $\int x^n \ln x dx$, $n \in \mathbb{N}_+$, f) $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx$.

3. Całkując przez podstawienie, wyznaczyć całki nieoznaczone

a) $\int (5 - 3x)^{10} dx$, b) $\int \frac{1}{1 + \sqrt{x+1}} dx$, c) $\int \frac{x^3}{(x-1)^{100}} dx$,
d) $\int x^2 \sqrt[4]{1+x} dx$, e) $\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$, f) $\int \frac{1}{x^2} \cos\left(\frac{1}{x}\right) dx$,
g) $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin x}} dx$, h) $\int \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}{(1+x)\sqrt{x}} dx$, i) $\int \frac{2x^3 - x}{x^4 - x^2 + 1} dx$.

4. Wyznaczyć całki nieoznaczone

a) $\int e^{|x|} dx$, b) $\int \max\{1, x^2\} dx$, c) $\int (|x| + |x-1|) dx$.

5. Stosując różne metody całkowania, wyznaczyć całki nieoznaczone

a) $\int e^{\sqrt[3]{x}} dx$, b) $\int \cos(1 + \sqrt{x}) dx$, c) $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx$,
d) $\int x^3 e^{x^2} dx$, e) $\int x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) dx$, f) $\int \frac{1}{x^4} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx$,
g) $\int 3^x \cos x dx$, h) $\int \frac{x}{\sin^2 x} dx$, i) $\int \arccos x dx$.

6. Dla $n \in \mathbb{N}$ wyprowadzić wzór rekurencyjny dla całki

$$I_n = \int x^n e^x dx.$$

7. Wyznaczyć całki nieoznaczone funkcji wymiernych

a) $\int \frac{x-1}{x^2+x-6} dx$, b) $\int \frac{x+1}{x^3-x^2+4x-4} dx$, c) $\int \frac{6x-6}{(x^2+1)(x^2+4)} dx$,
d) $\int \frac{x^2}{x^4-1} dx$, e) $\int \frac{dx}{x^4+1}$.

8. Wyznaczyć całki nieoznaczone funkcji trygonometrycznych

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \int \frac{\cos^3 x \, dx}{1 + \sin^2 x}, & \text{b)} \int \sin^3 x \cos^4 x \, dx, & \text{c)} \int \frac{dx}{\cos x} \, dx, \\ \text{d)} \int \frac{dx}{1 + 3 \cos x}, & \text{e)} \int \frac{dx}{1 + \sin^2 x}, & \text{f)} \int \frac{dx}{5 - 4 \sin x + 3 \cos x}. \end{array}$$