Wstęp do procesów stochastycznych — lista 1 25 lutego 2019

1. $p(x, y)$, $x, y \in I$, nazywamy macierzą stochastyczną lub macierzą przejścia, gdy $p(x, y) \geqslant 0$ dla wszystkich $x, y \in I$ oraz $\sum_{y \in I} p(x, y) = 1$ dla wszystkich $x \in I$. Rozstrzygnij, które z następujących macierzy są stochastyczne:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}; \; p(i, j) = 2 \times 3^{i-j}, \; 1 \leqslant i < j; \; p(i, j) = 2^{j-i}, \; 1 \leqslant j < i.$$

2. Podaj własny przykład macierzy przejścia.

3. W pierwszej urnie są 2 białe kule, a w drugiej - dwie czarne. W chwilach $n = 1, 2, ...$ losujemy po jednej kuli z każdej urny i zamieniamy je miejscami. Jak prosto opisać stan układu? Niech $X_0 = 2$ i niech X_n będzie liczbą białych kul w pierwszej urnie po n-tym losowaniu. Podaj macierz przejścia tego łańcucha Markowa, tj. $P(X_{n+1} = i | X_n = j)$, dla $i, j = 0, 1, 2$.

4. Rozwiąż podobne zadanie, gdy każda urna zawiera początkowo N kul.

5. Stanami łańcucha $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ są 1, 2 i 3, a macierzą przejścia jest

$$\begin{bmatrix} 0,2 & 0 & 0,8 \\ 0,7 & 0,3 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0,6 \end{bmatrix}.$$

Oblicz: a) $P(X_2 = 1)$, gdy $P(X_0 = 1) = 1$; b) $P(X_3 = 1 | X_0 = 2)$.

6. Niech ξ_i, $i = 1, 2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi (np. o wartościach całkowitych) i niech $X_n = \sum_{0 < i \leqslant n} \xi_i$ dla $n = 0, 1, \ldots$. Czy ten proces spełnia warunek Markowa, tj. czy

$$P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n, X_{n-1} = x_{n-1}, \ldots, X_1 = x_1) = P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n)$$

dla dowolnych n i $x_1, \ldots, x_n$?

7. Rozpatrzmy ciąg niezależnych rzutów taką monetą, że prawdopodobieństwo otrzymania awersu wynosi p. Niech Y_n będzie równe liczbie orłów pomniejszonej o liczbę reszek, po n rzutach. Oblicz $P(Y_3 = -1)$. Opisz macierz przejścia tego łańcucha Markowa.

8. Wyznacz (wszystkie) rozkłady stacjonarne dla macierzy przejścia

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

9. Stany łańcucha (Y_n) to 0 i 1, $P(Y_0 = 0) = p$, a macierz przejścia to $\begin{bmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{bmatrix}$. Wykaż, że

$$P(Y_n = 0) = \frac{\beta}{\alpha + \beta} + (1 - \alpha - \beta)^n \left(p - \frac{\beta}{\alpha + \beta} \right).$$