# Wstęp do procesów stochastycznych — lista 2 5 marca 2019

1. Jeżeli proces $(X_n)$ (powiedzmy o przeliczalnej liczbie stanów) spełnia warunek Markowa, a funkcja $f$ jest różnowartościowa, to $f(X_n)$ też jest łańcuchem Markowa. Uzasadnij. Jak wygląda macierz przejścia?

2. Niech zmienne losowe $\xi_i$ będą niezależne o rozkładzie Bernoulliego: $P(\xi_i = \pm 1) = \frac{1}{2}$, $i = 1, 2, \ldots$.

   (a) Niech $Y_n = (\xi_n + \xi_{n-1})/2$ dla $n = 2, 3, \ldots$. Wykaż, że proces $Y = (Y_n)_{n \geqslant 2}$ nie spełnia warunku Markowa. Wskazówka: rozważ $Y_2 = 1$, $Y_3 = 0$, $Y_4 = 1$.

   (b) Czy proces $Z_n = \xi_n \cdot \xi_{n-1}$ $(n \geqslant 2)$ jest łańcuchem Markowa?

3. Macierz stochastyczną nazywamy *podwójnie stochastyczną*, jeżeli suma elementów każdej kolumny wynosi 1. Taka macierz ma łatwy do odgadnięcia rozkład stacjonarny. Znajdź ten rozkład.

4. (Lemat) Dane są takie liczby naturalne $n_1, \ n_2, ..., n_k$, że ich największym wspólnym dzielnikiem jest liczba 1. Wtedy istnieje liczba $M$ o tej własności, że dla każdego $n \geqslant M$ można znaleźć nieujemne całkowite liczby $c_1, c_2, ..., c_k$, dla których $n = c_1 n_1 + c_2 n_2 + ... + c_k n_k$.

   (a) Udowodnij ten wynik.

   (b) Skróć sformułowanie Lematu używając pojęcia "prawie wszystkie liczby naturalne".

   (c) Uzasadnij, że gdyby w zapisie dopuścić ujemne liczby $c_i$, to można tak zapisać każdą liczbę całkowitą $n$.

   (d) Gdy największym wspólnym dzielnikiem jest $d > 1$, to równość pozostaje w mocy po zamianie $n$ na $nd$. Uzasadnij.

5. Udowodnij, że w nieprzywiedlnym łańcuchu Markowa wszystkie stany mają ten sam okres.

6. Zbadaj nieprzywiedlność i okresowość łańcuchów Markowa o podanych macierzach przejścia.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0.8 \\ 0.7 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.3 & 0.7 & 0 & 0 & 0 \\ 0.7 & 0.3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.2 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

7. Stan $k$ nazywamy pochłaniającym, gdy $p_{kk} = 1$. Które macierze na tej liście mają takie stany?

8. Zbadaj, czy istnieje granica $\lim \mathrm{P}^n$, a jeśli tak, to ją oblicz dla następujących macierzy P:

$$\begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0.8 \\ 0.7 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

9. Macierz stochastyczna $\mathbb{P} = [p_{ij}]$ stopnia 2 jest macierzą przejścia w dwóch krokach wtedy i tylko wtedy, gdy $p_{11} + p_{22} \geqslant 1$. Uzasadnij. (Jedna z implikacji jest wyraźnie łatwiejsza niż druga.)