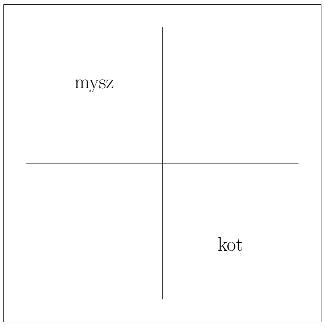
Wstęp do procesów stochastycznych — lista 3 13 marca 2017

1. W pudełku A jest sześć kul ponumerowanych liczbami od 1 do 6, a pudełko B jest puste. Wykonamy milion rzutów kostką i po każdym rzucie przełożymy kulę o wylosowanym numerze do drugiego pudełka. Oblicz przybliżone prawdopodobieństwo tego, że na zakończenie pudełko A będzie puste.

2. W ciągu doświadczeń Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu p mówimy, że w chwili n układ znajduje się w stanie 0, gdy n-te doświadczenie dało porażkę, a w stanie $k \in \{1, 2, 3, ..., n\}$, gdy ostatnia porażka nastąpiła w chwili $n - k$ ("zerowe" doświadczenie uważamy za porażkę). Innymi słowy, stan w chwili n to długość nieprzerwanej serii sukcesów, trwającej do chwili n. Oblicz $\lim_{n\to\infty} p_{ij}(n) = p_j$, zakładając istnienie tej granicy.

3. Niech $T = \inf\{n > 0 : X_n = 2\}$. Oblicz $P_1(T = 3)$ dla łańcucha o macierzy $\mathbb{P} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

4. Mysz błądzi losowo w labiryncie. Jaka jest szansa, że przeżyje co najmniej cztery przemieszczenia?



Rys. 1: labirynt

5. Udowodnij, że w niesymetrycznym błądzeniu losowym na $\mathbb{Z}$ wszystkie stany są chwilowe.

6. Oblicz generator $\mathbb{G} = \mathbb{P}'(0)$ dla markowskiej półgrupy macierzy $\mathbb{P}(t) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 + 2e^{-3t} & 2 - 2e^{-3t} \\ 1 - e^{-3t} & 2 + e^{-3t} \end{bmatrix}$.

7. Sprawdź, że $\mathbb{G} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ jest generatorem markowskiej półgrupy macierzy $\{\mathbb{P}(t),\ t \geqslant 0\}$. Oblicz $\mathbb{P}(t)$ oraz $\lim \mathbb{P}(t)$ gdy $t \to 0^+$, $t \to \infty$. Czy $\mathbb{P}(t)$ jest nieprzywiedlna (dla każdego $t > 0$)?

8. Wyznacz markowską półgrupę macierzy $\{\mathbb{P}(t),\ t \geqslant 0\}$ generowaną przez $\mathbb{G} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

9. Markowska macierz $\mathbb{P}(t) = [p_{i,j}(t)]_{i,j=1}^N$ o generatorze $G = [g_{i,j}]_{i,j=1}^N$ jest nieprzywiedlna dla (pewnego, i dla każdego) $t > 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych $i \neq j$ istnieje ciąg $i = i_0 \neq i_1 \neq i_2 \neq \ldots \neq i_n = j$ taki, że $g_{i_k, i_{k+1}} \neq 0$, dla $k = 0, \ldots, n-1$.

10. Jak zachowuje się $p_{i,j}(t)$ gdy $t \to 0$, w zależności od n w zadaniu 9?