Wstęp do procesów stochastycznych — lista 4 13 marca 2017.

1. Udowodnij, że nieprzywiedlna macierz markowska $\mathbb{P}(t)$ jest zbieżna, gdy $t \to \infty$.

2. Czy markowska macierz $\mathbb{P}(t)$ jest odwracalna dla każdego t?

3. Czy $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \mathbb{P}(2)$ dla (jakiejkolwiek) markowskiej półgrupy macierzy $\{\mathbb{P}(t),\ t \geqslant 0\}$?

4. Oblicz wartość oczekiwaną i wariancję rozkładu wykładniczego: $P(X > t) = e^{-\lambda t}$, $t \geqslant 0$.

5. Wykaż, że rozkład wykładniczy ma własność „braku pamięci":
$$P(X > s+t | X > s) = P(X > t)\,, \quad s, t \geqslant 0\,.$$

6. Znajdź rozkład sumy dwóch niezależnych zmiennych losowych o rozkładach gamma z tym samym parametrem skali, tj. $\Gamma(\lambda, p_1)$ i $\Gamma(\lambda, p_2)$.

7. Jaki rozkład ma suma dwóch niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie wykładniczym z tym samym parametrem? Jaki jest rozkład sumy trzech i więcej takich zmiennych?

8. Oblicz funkcję charakterystyczną rozkładu wykładniczego i rozkładu gamma

9. Wyznacz rozkłady skończenie-wymiarowe procesu Poissona o intensywności λ, tzn. dla dowolnych liczb rzeczywistych $0 \leqslant t_1 < t_2 < ... < t_k$ oraz naturalnych $0 \leqslant n_1 \leqslant n_2 \leqslant ... \leqslant n_k$ oblicz
$$P(N(t_1) = n_1,\ N(t_2) = n_2,\ ..., N(t_k) = n_k).$$

10. Niech $(X(t))_{t \geqslant 0}$ będzie procesem Poissona o intensywności λ. Dla $k \leqslant n$ oraz $0 < t < t+h < u$ oblicz
    (a) $P(X(u) = n\ | X(t) = k)$,
    (b) $P(X(t) = k\ | X(u) = n)$,
    (c) $P(X(t+h) - X(t) = k\ | X(u) = n)$.