# Wstęp do procesów stochastycznych — lista 5 28 marca 2017

Więcej o procesie Poissona, czystym procesie urodzin, procesie Yule'a i o procesach urodzin i śmierci: [F I] W. Feller, Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa, tom I, PWN, Warszawa 1987. (str. 394-410)

1. Niech $(X(t))_{t \geqslant 0}$ będzie procesem Poissona o intensywności $\lambda$. Oblicz funkcję charakterystyczną, transformatę Laplace'a i funkcję tworzącą momenty (rozkładu zmiennej losowej) $X(t)$.

2. Niech $(S_n;\, n \geqslant 1)$ będą sumami częściowymi ciągu niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie wykładniczym z wartością oczekiwaną $1/\lambda$ i niech $p_n$ oznacza funkcję gęstości rozkładu zmiennej $S_n$. Jak zapisać $p_{n+m}$ przy pomocy $p_n$ i $p_m$?

3. Niech $(X(t))_{t \geqslant 0}$ będzie procesem Poissona o intensywności $\lambda$. Niech $p_t$ oznacza rozkład $X(t)$. Jak zapisać $p_{t+s}$ przy pomocy $p_t$ i $p_s$?

4. Załóżmy, że autobusy przyjeżdżają na przystanek tak, jak pojawiają się sygnały w procesie Poissona o intensywności $\lambda$. Przychodzimy na przystanek w losowo wybranej chwili $t \geqslant 0$. Niech $C$ oznacza czas oczekiwania na najbliższy autobus, a $D$ *odstęp* czasu pomiędzy przyjazdami kolejnych autobusów, w który trafiliśmy. Oblicz $P(C \geqslant x)$ oraz $E[C]$. Czy $D$ ma rozkład wykładniczy z wartością oczekiwaną $1/\lambda$?

5. Wykaż, że proces Poissona ma własność Markowa, tzn. dla każdego $n \in N$, dla dowolnych *chwil* $0 \leqslant t_1 < t_2 < ... < t_n < t_{n+1}$, i *liczności* $0 \leqslant k_1 \leqslant k_2 \leqslant ... \leqslant k_n \leqslant m$, zachodzi równość

$$P(X(t_{n+1}) = m \,|X(t_n) = k_n, X(t_{n-1}) = k_{n-1}, ..., X(t_1) = k_1) = P(X(t_{n+1}) = m \,|X(t_n) = k_n).$$

6. Niech $(X(t))_{t \geqslant 0}$ będzie procesem Poissona o intensywności $\lambda$. Załóżmy, że wszytkie trajektorie procesu $X$ są prawostronnie ciągłymi funkcjami schodkowymi o skokach o wysokości 1. Definiujemy czas oczekiwania na $j$-ty sygnał,

$$S_j = \inf\{t > 0 :\ X(t) = j\}, \qquad j = 0, 1, 2, ...,$$

oraz odstępy pomiędzy sygnałami,

$$T_j = S_j - S_{j-1}, \qquad j = 1, 2, 3, \dots .$$

Jaki jest rozkład czasu oczekiwania $S_j$? Udowodnij, że $(T_j)$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie wykładniczym z parametrem $\lambda$.

7. Niech $(X_1(t))_{t \geqslant 0}$ oraz $(X_2(t))_{t \geqslant 0}$ będą niezależnymi procesami Poissona o intensywnościach odpowiednio $\lambda_1$ oraz $\lambda_2$. Dla $k \leqslant n$ oblicz

$$P(X_1(t) = k \,|X_1(t) + X_2(t) = n).$$

8. Dla liczb $Z_1$, $Z_2$,...,$Z_n$, przez $Z^{(1)}, Z^{(2)}, ..., Z^{(n)}$ oznaczamy ich ustawienie w porządku niemalejącym, a $Z^{(k)}$ nazywamy $k$-tą *statystyką pozycyjną*. Załóżmy, że $Z_i$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na $[0, 1]$. Opisz rozkład wektora $(Z^{(1)}, Z^{(2)}, ..., Z^{(n)})$. Wsk.: Jak wygląda nośnik tego rozkładu?

9. Niech $X$ będzie procesem Poissona o intensywności $\lambda$, i niech $M(t) = X(t) - \lambda t$. Czy $M$ jest martyngałem względem filtracji $\mathcal{F}_t = \sigma(X(s);\, s \leqslant t)$?

10. Niech $X$ będzie procesem Poissona o intensywności $\lambda$. Oznaczmy $S_i = \inf\{t > 0 :\ X(t) = i\}$, $i = 1, 2, \dots$. Dla $n \in \mathbb{N}$ oraz $0 < s_1 < s_2 < \dots < s_n < t$, oblicz $P(S_i \leqslant s_i,\ i = 1, 2, ..., n \,|X(t) = n\}$. Wsk.: Przedstaw $S_i$ jako sumę niezależnych zmiennych losowych o rozkładach wykładniczych.