Wstęp do procesów stochastycznych — lista 6 28 marca 2017

1. Niech $X(t)$ będzie czystym procesem urodzin o intensywnościach $\lambda_n \geqslant 0$ i stanie początkowym 0, tzn. $P(X(0)=0)=1$. Udowodnij, że

$$\left[\forall t \geqslant 0 \quad \sum_{n=0}^{\infty} P(X(t)=n)=1\right] \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n}=\infty\,.$$

2. Wypowiedz się na temat istnienia i jednoznaczności rozwiązań układu równań różniczkowych:

$$\begin{aligned} f_0'(t) &= -\lambda_0 f_0(t)\,, \\ f_n'(t) &= -\lambda_n f_n(t)+\lambda_{n-1} f_{n-1}(t)\,, \quad n=1,2,\ldots\,, \end{aligned}$$

z dowolnymi warunkami początkowymi. Załóżmy, że $\lambda_n \geqslant 0$ i $f_n(0) \geqslant 0$ dla wszystkich n. Udowodnij, że $f_n(t) \geqslant 0$ dla wszystkich $t \geqslant 0$ i $n \geqslant 0$.

3. (Proces Yule'a) W czystym procesie urodzin zakładamy, że intensywność *domnażania bakterii w kolonii* jest proporcjonalna do liczby obecnych bakterii, tzn. $\lambda_n = n\lambda$ (rozmnażanie przez podział).
   (a) Zapisz układ równań opisujący ten proces, jeśli $P(X(0)=1)=1$.
   (b) Rozwiąż równania opisujące P_1, P_2, P_3, i odgadnij wzór na P_n (lub zobacz [F I]).
   (c) Sprawdź indukcyjnie, czy odgadnięty wzór spełnia założone równania.
   (d) Jaki jest wzór na P_n, jeśli $P(X(0)=i)=1$, dla (innego, dowolnego) $i \in \mathbb{N}$?

4. Czy w procesie Yule'a może zdarzyć się "eksplozja demograficzna w skończonym czasie"? A w czystych procesach urodzin o intensywnościach $\lambda_n = n^2$; $\lambda_n = n(n-1)$, gdy $P(X(0)=1)=1$?

5. Sprawdź bezpośrednim rachunkiem równość Chapmana-Kołmogorowa dla $P_{1,1}$ i $P_{1,2}$ w procesie Yule'a.

6. W procesie urodzin i śmierci połóżmy $\lambda_n = n\lambda$ oraz $\mu_n = n\mu$, gdzie $\lambda, \mu > 0$. Niech $P(X(0)=i)=1$ dla danego $i \in \mathbb{N}$. Korzystając z układu równań opisującego proces, ułóż równanie różniczkowe, które powinna spełniać funkcja $E(t)=E(X(t))$ i rozwiąż to równanie. Zbadaj zachowanie tej funkcji w zależności od λ i μ.

7. Znajdź prawdopodobieństwo przejścia w procesie urodzin i śmierci ze zbiorem stanów $S=\{1,2\}$ oraz intensywnościami urodzin $\lambda_1 = 2$ i śmierci $\mu_2 = 1$.