Wstęp do procesów stochastycznych — lista 7 25 kwietnia 2017

1. Czy następujące funkcje określają prawdopodobieństwo przejścia (p.p.) (jednorodne w czasie):

   (a) (dla procesu Cauchy'ego na $\mathbb{R}$)
   $$P_t(x, A) = \frac{1}{\pi} \int_{A-x} \frac{t}{t^2 + y^2}\, dy\,,$$

   (b) (dla jednostajnego dryfu w prawo na $\mathbb{R}$ o prędkości 2)
   $$P_t(x, A) = \delta_{2t}(A - x)\,,$$

   (c) (dla procesu Wienera na $[0, \infty)$, z barierą odbijającą w zerze)
   $$P_t(x, A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \left(\int_{A-x} e^{-y^2/2t}\, dy + \int_{A+x} e^{-y^2/2t}\, dy \right)?$$

2. Dla macierzy przejścia $\mathbb{P}$ w jednym kroku, $p_{m,n}(i, \{j\}) = \mathbb{P}^{n-m}_{i,j}$ definiuje prawdopodobieństwo przejścia. Przeprowadź tą i podobną dyskusję dla macierzy markowskiej z czasem ciągłym.

3. Podaj p.p. procesu Poissona.

4. Opisz p.p. czystego procesu urodzin bez eksplozji demograficznej, i sprawdź postulaty p.p.

5. Które z powyższych p.p. spełniają warunek wystarczający Dynkina-Kinneya dla ciągłości/prawostronnej ciągłości procesu: $p_t(x, (x-\varepsilon, x+\varepsilon)^c) = o(t)$, gdy $t \to 0^+$; $p_t(x, (x-\varepsilon, x+\varepsilon)^c) = o(1)$, gdy $t \to 0^+$?

6. Zbadaj ciągłość stochastyczną procesów Wienera, Poissona oraz czystego procesu urodzin.

7. Podaj funkcję gęstości rozkładów skończenie-wymiarowych procesu Wienera.

8. Niech W będzie procesem Wienera. Oblicz

   (a) $P(W(2) > W(1) > 0)$,

   (b) $P(W(\frac{1}{2}) - \frac{1}{2}W(1) > 1)$,

   (c) $P(2W^2(1) + W^2(2) - 2W(1)W(2) < 1)$,

   (d) $P((\sqrt{3} - 1)W(1) + W(2) > 0 \mid W(1) > 0)$.

9. Nazwij rozkład $W(1)^2 + [W(2) - W(1)]^2 + \ldots + [W(n) - W(n-1)]^2$, dla procesu Wienera W.