Wstęp do procesów stochastycznych — lista 8 25 kwietnia 2017

1. Korzystając z niezależności przyrostów, dla procesu Poissona i Wienera oblicz
$$E\left(e^{i\xi X_t}\,|\mathcal{F}_s\right), \quad \xi \in R, \quad 0 \leqslant s < t.$$

2. Niech W będzie procesem Wienera. Czy $2^{-1/2}W_{2t}$ jest procesem Wienera?

3. Niech W będzie procesem Wienera. Czy $X_t = tW_{1/t}$ $(X_0 = 0)$ jest procesem Wienera?

4. Niech X_n będa i.i.d. o indywidualnym rozkładzie $N(0,1)$. Czy $|X_n| \leqslant \sqrt{2\log n}$ dla p.w. n p.n.p.?

5. Wykaż, że rozkłady skończenie-wymiarowe procesu $\{X_t\}_{t\geqslant 0}$ o jednorodnych przyrostach niezależnych, i startującego w zerze, są wyznaczone przez rozkłady jednowymiarowe. Zinterpretuj równość Chapmana-Kołmogorowa za pomocą splotu i funkcji charakterystycznych. Uzasadnij, że rozkład X_t jest nieskończenie podzielny. Dla stochastycznie ciagłego X wynika stąd (nie uzasadniaj), że istnieją jedyne: liczba $a \geqslant 0$, miara $\nu \geqslant 0$ taka, że $\int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \min(1,x^2)\nu(dx) < \infty$, i liczba $b \in \mathbb{R}$, takie, że
$$E\exp\{i\xi X_t\} = \exp t\left\{-\xi^2/2 + \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} (e^{i\xi x} - 1 - i\xi x\mathbf{1}_{|x|<1})\,\nu(dx) + i\xi b\right\}.$$

6. Korzystając z 0-1 prawa Blumenthala dla procesu Wienera oblicz $\limsup_{t\to\infty} W_t$ i $\liminf_{t\to\infty} W_t$.

7. Biorąc pod uwage LIL oblicz
   (a) $\liminf_{t\to 0^+} W_t/\sqrt{2t\log\log(1/t)}$,
   (b) $\limsup_{t\to 0^+} |W_t|/\sqrt{2t\log\log(1/t)}$,
   (c) $\limsup_{t\to\infty} W_t/\sqrt{2t\log\log t}$,
   (d) $\limsup_{t\to 0^+}(W_{1+t} - W_1)/\sqrt{t\log\log(1/t)}$,
   (e) $\liminf_{t\to\infty} |W_t|/\sqrt{2t\log\log t}$,
   (f) $\lim_{t\to 0^+} W_t/t^{1/3}$.

8. Niech $D_n = \{0 = t_{n,0} < t_{n,1} < \cdots < t_{n,k_n} = t\}$, $n = 1,2,\ldots$, będzie ciągiem podziałów odcinka $[0,t]$ i niech $W_{n,i} = W(t_{n,i}) - W(t_{n,i-1})$, $i = 1,2,\ldots,k_n$ będą odpowiadającymi przyrostami procesu Wienera. Załóżmy, że $D_1 \subset D_2 \subset \ldots$ oraz $\max_i |t_{n,i} - t_{n,i-1}| \to 0$, gdy $n \to \infty$. Wykaż, że istnieje granica w $L^2(\Omega, P)$
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{k_n} W_{n,i}^2 = t.$$

9. Niech $\tau = \inf\{t > 0 : W_t < 0\}$. Udowodnij, że $P(\tau = 0) = 1$, a stąd–że W_t *oscyluje*, gdy $t \to 0^+$.