Wstęp do procesów stochastycznych — lista 9 9 maja 2017

Konstrukcja procesu Wienera za pomocą funkcji Haara.

1. Dla $m = 0, 1, \ldots$, $k = 1, 2, \ldots, 2^m$ definiujemy funkcje Haara

$$H_{m,k}(t) = \begin{cases} 2^{m/2}, & \frac{2k-2}{2^{m+1}} \leqslant t \leqslant \frac{2k-1}{2^{m+1}}, \\ -2^{m/2}, & \frac{2k-1}{2^{m+1}} < t \leqslant \frac{2k}{2^{m+1}}, \\ 0, & \text{poza tym}. \end{cases}$$

   Narysuj wykresy kilku funkcji $H_{m,k}$.

2. Wytłumacz, że $n = 2^m + k$ liniowo porządkuje $H_n = H_{m,k}$, $n = 2, 3, \ldots$. Niech $H_1(t) \equiv 1$.

3. Sprawdź, że $\{H_n\}$ są bazą ortonormalną w $L^2([0,1], dx)$ (tzw. bazą Haara), i zachodzi równość Parsevala: $(f, g) = \sum_{n=0}^{\infty} (f, H_n)(g, H_n)$, dla $f, g \in L^2[0,1]$.

4. Niech $S_n = \int_0^t H_n(x)\,dx$. Narysuj wykresy kilku funkcji $S_n(t)$. Uzasadnij, że $0 \leqslant S_1(t) \leqslant 1$ oraz

$$0 \leqslant S_n(t) \leqslant 2^{-m/2-1}, \quad \text{gdy } 2^m < n \leqslant 2^{m+1}, \ m = 0, 1, \ldots.$$

   (Komentarz: Funkcje (S_n) tworzą bazę Schaudera przestrzeni $\{f \in C[0,1] : f(0) = 0\}$.)

5. Jeżeli ciąg (a_n) liczb rzeczywistych spełnia dla pewnego $\varepsilon < \frac{1}{2}$ warunek $a_n = O(n^{\varepsilon})$, to szereg $\sum a_n S_n(t)$ jest jednostajnie zbieżny na odcinku $[0, 1]$.

6. Jeżeli X_n jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie $N(0, 1)$, to

$$P(|X_n| = O(\sqrt{\log n})) = 1\,.$$

   (Tzn. dla prawie każdego ω istnieje stała M_ω taka, że $|X_n| < M_\omega \sqrt{\log n}$, $n = 3, 4, \ldots$.)

7. Niech (X_n) będzie ciągiem niezależnych zmiennych o rozkładzie $N(0, 1)$. Szereg losowy

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n(\omega) S_n(t) := W_t(\omega)$$

   jest zbieżny prawie na pewno, a funkcja $[0, 1] \ni t \mapsto W_t$ jest ciągła.

8. Powyższy proces $(W_t)_{0 \leqslant t \leqslant 1}$ jest procesem Wienera na $[0, 1]$ tzn.:

   (a) $W_0 = 0$,

   (b) przyrosty procesu W są niezależne,

   (c) rozkłady przyrostów $W(t) - W(s)$ są normalne $N(0, t - s)$ dla $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1$,

   (d) trajektorie procesu W są ciągłe.

   Wskazówka: Wykaż dla $s < t$ niezależność $W(s) - W(0)$ i $W(t) - W(s)$, wykorzystując niezależność zmiennych X_n i własność Parsevala układu Haara.

9. Jak otrzymać teraz proces Wienera na przedziale czasu $[0, \infty]$?

Komentarz: Podobną konstrukcję, ale opartą na układzie trygonometrycznym, czyli funkcjach $\sin(nt)$ i $\cos(nt)$, podał Norbert Wiener w roku 1926. Rachunki potrzebne do udowodnienia analogicznego wyniku były niezwykle zawiłe. Pomysł wykorzystania bazy Haara pochodzi od Zbigniewa Ciesielskiego.