Wstęp do procesów stochastycznych — lista 10 9 maja 2017

1. Udowodnij, że prawie wszystkie trajektorie procesu Wienera mają na każdym odcinku $[a, b]$, $0 \leqslant a < b$, wahanie nieograniczone.

2. Niech $(\Omega, \mathcal{F})$ będzie przestrzenią mierzalną, na której zadana jest filtracja $(\mathcal{F}_t)_{t \geqslant 0}$.

   (a) Niech τ_1, τ_2 będą czasami/momentami stopu (zatrzymania, Markowa). Udowodnij, że $\max(\tau_1, \tau_2)$, $\min(\tau_1, \tau_2)$, $\tau_1 + \tau_2$ oraz $2\tau_1$ są czasami stopu, a $\tau_1/2$ może nie być czasem stopu.

   (b) Załóżmy, że zmienna losowa $\tau \geqslant 0$ przyjmuje przeliczalnie wiele wartości. Udowodnij, że τ jest czasem stopu wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $t \geqslant 0$ zachodzi $\{\tau = t\} \in \mathcal{F}_t$.

   (c) Jeśli τ jest czasem stopu, to $\tau_n = \dfrac{\lfloor 2^n \tau \rfloor + 1}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$, też są czasami stopu, oraz $\tau_n \downarrow \tau$.

3. Chwile S_n przyjścia kolejnych sygnałów w procesie Poissona są momentami stopu. Wychodząc od mocnej własności Markowa dla procesu Poissona udowodnij, że odstępy między tymi chwilami są niezależne i mają rozkład wykładniczy.

4. Niech W będzie procesem Wienera, $r > 0$, $T_r = \inf\{t \geqslant 0 : \, W(t) = r\}$.

   (a) Podaj $W(T_r)$.

   (b) Korzystając z zasady odbicia udowodnij (zasadę odbicia :) $P(\sup_{s \leqslant t} W_s > r) = 2P(W_t > r)$.

   (c) Opisz rozkład zmiennej losowej $M(t) = \max_{0 \leqslant s \leqslant t} W(s)$.

   (d) Wyznacz rozkład zmiennej losowej T_r.

5. Załóżmy, że martyngał $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ jest całkowalny z kwadratem. Definiujemy (różnice martyngałowe) $D_n = X_n - X_{n-1}$ dla $n = 1, 2, 3...$, oraz $D_0 = X_0$. Niech $S_n = \sum_{k \leqslant n} D_k^2$. Udowodnij, że $EX_n^2 = ES_n$ oraz $X_n^2 - S_n$ jest martyngałem. Znajdź analogie dla procesów Wienera i Poissona.

6. Niech $(W_t)_{t \geqslant 0}$ będzie procesem Wienera, $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s, \ s \leqslant t)$. Czy dla każdego $a \in \mathbb{R}$, rodzina $(e^{aW_t}, \mathcal{F}_t)$ jest podmartyngałem? Znajdź taką funkcję $b(t)$, że $(e^{aW_t - b(t)}, \mathcal{F}_t)$ jest martyngałem.

7. Niech $p_t(x, A) = (2\pi t)^{-1/2} \int_{A-x} e^{-|y|^2/2t} \, dy$ i $g_t(x, A) = (4\pi t)^{-1/2} \int_{A-x} e^{-|y|^2/4t} \, dy$. Które z tych p.p. odpowiada procesowi Wienera? Porównaj $P_t f(x) = p_t(x, f)$ i $T_t f(x) = g_t(x, f)$. Dla ograniczonej funkcji f na $\mathbb{R}$ o ciągłej drugiej pochodnej oblicz granice

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t} \left(P_t f(x) - f(x) \right) , \quad \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t} \left(T_t f(x) - f(x) \right) .$$

   Wskazówka: całka z funkcji liniowej względem symetrycznej miary gaussowskiej jest równa zero.

8. Oblicz podobną granicę dla półgrupy procesu Poissona.