Analiza wypukła, Matematyka, 2. st.
semestr zimowy 2019/2020
I lista zadań

1. Niech $C \in \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem wypukłym. Pokaż, że:
   (a) $\overline{C}$ jest zbiorem wypukłym,
   (b) $\mathrm{Int}(C)$ jest zbiorem wypukłym.

2. Pokaż, że dla dowolnej rodziny zbiorów wypukłych w $\mathbb{R}^n$, $\{C_i, ; \in I\}$, $\bigcap_{i \in I} C_i$ jest również zbiorem wypukłym.

3. Niech $C_1, C_2 \subset \mathbb{R}^n$ będą zbiorami wypukłymi. Pokaż, że suma wektorowa oraz różnica wektorowa tych zbiorów, czyli zbiory
$$C_1 + C_2 := \{x \in \mathbb{R}^n : x = x_1 + x_2, x_1 \in C_1, x_2 \in C_2\},$$
$$C_1 - C_2 := \{x \in \mathbb{R}^n : x = x_1 - x_2, x_1 \in C_1, x_2 \in C_2\}.$$
   są także wypukłe.

4. Niech $C \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem wypukłym oraz niech a i b będą liczbami rzeczywistymi takimi że $0 \leqslant a \leqslant b$. Pokaż, że zbiór $\bigcup_{\alpha \in [a,b]} \alpha C$, gdzie $\alpha C := \{x \in \mathbb{R}^n : x = \alpha y, y \in C\}$ jest zbiorem wypukłym. Uzasadnij (znajdując odpowiedni przykład), że założenie $a \geqslant 0$ jest istotne.

5. Pokaż, że dla dowolnego zbioru wypukłego $C \subset \mathbb{R}^n$ i dowolnych liczb rzeczywistych nieujemnych α oraz β zachodzi równość
$$(\alpha + \beta)C = \alpha C + \beta C$$
   (oznaczenia jak w poprzednich zadaniach). Znajdź przykład na to, że założenie o wypukłości zbioru C jest istotne.

6. Pokaż, że:
   (a) otoczka wypukła zbioru otwartego jest zbiorem otwartym,
   (b) otoczka wypukła zbioru zwartego jest zbiorem zwartym.

   Podaj przykład zbioru domkniętego, którego otoczka wypukła nie jest zbiorem domkniętym.

7. Niech $S = \{(0, 0, 0), (2, -1, 0), (-1, 0, 3), (0, 4, -1)\}$. Zapisz $\mathrm{conv}(S)$ przy pomocy nierówności liniowych (jako część wspólną kilku półprzestrzeni).

8. Podaj sposób (i uzasadnij jego poprawność) na znalezienie rzutu punktu $x \in \mathbb{R}^n$ na
   (a) domkniętą kulę o środku x_0 i promieniu r;
   (b) hiperprostopadłościan $\{x \in \mathbb{R}^n : a_i \leqslant x_i \leqslant b_i\}$ dla pewnych zadanych liczb rzeczywistych $a_i < b_i$, $i = 1, \ldots, n$.

9. Udowodnij, że jeśli C jest podprzestrzenią liniową $\mathbb{R}^n$, to z jest rzutem x na C (jako zbiór wypukły) wtedy i tylko wtedy, gdy $(x - z)^T y = 0$ dla każdego $y \in C$ (czyli jeśli jest to rzut ortogonalny na C).

10. Pokaż, że jeśli macierz AA^T jest odwracalna, to $x^* = -(I - A^T(AA^T)^{-1}A)c$ jest rozwiązaniem problemu
    znajdź min $\frac{1}{2}\|x\|^2 + c^T x$ przy ograniczeniu $Ax = 0$.
    Wskazówka: Najpierw udowodnij, że problem ten jest równoważny rzutowaniu wektora $-c$ na przestrzeń $\{x : Ax = 0\}$.