Analiza wypukła, Matematyka, 2. st.
semestr zimowy 2019/2020
II lista zadań

1. Niech zbiory $C_1, C_2 \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, będą niepuste, wypukłe, zwarte i rozłączne. Pokaż, że istnieją punkty $x_1 \in C_1$ oraz $x_2 \in C_2$, takie że hiperpłaszczyzna podpierającą C_1 w x_1 jest jednocześnie hiperpłaszczyzną podpierającą C_2 w x_2.

2. Niech
$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^4 + y^2 z + z^2 \leqslant 1, y^2 \leqslant z, z \geqslant 0\}.$$
Pokaż, że C jest zbiorem wypukłym. Następnie znajdź płaszczyznę podpierającą zbiór C w punkcie $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$. Czy istnieją takie punkty na brzegu zbioru C, gdzie płaszczyzna podpierająca nie jest określona jednoznacznie? Jeśli tak, wskaż taki punkt.

3. (a) Niech $S_1 \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem zwartym, a $S_2 \subset \mathbb{R}^n$ – zbiorem domkniętym. Pokaż, że ich różnica wektorowa $S_1 - S_2$ jest zbiorem domkniętym. Znajdź przykład na to, że różnica wektorowa dwóch zbiorów domkniętych nie musi być domknięta.
   (b) Znajdż przykład dwóch zbiorów wypukłych domkniętych, których nie można ściśle oddzielić hiperpłaszczyzną.

4. Załóżmy, że zbiory C_1 i C_2 spełniają założenia słabego twierdzenia o oddzielaniu oraz dodatkowo, że C_1 jest zbiorem otwartym. Pokaż, że istnieje wtedy wektor $A \in \mathbb{R}^n$ taki, że $A^T x > A^T y$ dla dowolnych $x \in C_1$, $y \in C_2$. Znajdź przykład na to, że zamiana założenia o otwartości C_1 na założenie, że C_1 jest domknięty nie wystarcza do istnienia wektora A o powyższej własności.

5. Niech zbiory C_1 i C_2 spełniają założenia słabego twierdzenia o oddzielaniu oraz dodatkowo niech odległość między tymi zbiorami
$$d := \inf_{x \in C_1, y \in C_2} \|x - y\|$$
będzie dodatnia. Pokaż, że istnieją wtedy wektory $A, b \in \mathbb{R}^n$ takie że $A^T x > b > A^T y$ dla dowolnych $x \in C_1$, $y \in C_2$.

6. Niech $C_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$, $C_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geqslant \frac{3}{4} + 2|x-1|\right\}$. Sprawdź, że spełniają one założenia mocnego twierdzenia o oddzielaniu, Znajdź hiperpłaszczyznę (czyli w tym wypadku prostą) ściśle oddzielającą te dwa zbiory:
   (a) stosując metodę wykorzystywaną w dowodzie mocnego twierdzenia o oddzielaniu,
   (b) wykorzystując własności geometryczne zbiorów C_1 i C_2.

7. Niech
$$C_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^n : z \geqslant e^{x+y}\}, \quad C_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^n : x \geqslant e^z, y \geqslant 0\}.$$
Uzasadnij, że C_1 i C_2 są wypukłe i rozłączne. Następnie znajdź (w jakikolwiek sposób, byle z uzasadnieniem) płaszczyznę ściśle rozdzielającą zbiory C_1 i C_2.

8. Korzystając z Lematu Farkasa udowodnij następujące twierdzenie o alternatywie:
Równanie macierzowe $Ax = b$ nie ma rozwiązań wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje wektor y taki że $A^T y = 0$, $b^T y > 0$.

9. Korzystając z Lematu Farkasa pokaż, że układ równań
$$\begin{cases} x + 3y - 5z = 2 \\ x - 4y - 7z = 3 \end{cases}$$
nie ma rozwiązań o wszystkich współrzędnych nieujemnych.

10. Korzystając z twierdzenia Gordana rozstrzygnij, czy układ równań
$$\begin{cases} -3x + 5y - 2z = 0 \\ -2x + 4y - z = 0 \end{cases}$$
ma niezerowe rozwiązanie o wszystkich współrzędnych nieujemnych.

11. Korzystając z twierdzenia z zadania 8. pokaż, że dla dowolnej macierzy A rozmiaru $m \times n$, gdzie $m \geqslant n$, jej rząd jest mniejszy od n, gdy wiersz jedynek nie jest kombinacją liniową jej wierszy. Znajdź przykład na to, że przeciwna implikacja nie jest prawdziwa.