Analiza wypukła, Matematyka, 2. st.
semestr zimowy 2019/2020
III lista zadań

1. Udowodnij twierdzenie o epigrafie z wykładu.

2. Udowodnij twierdzenie o wypukłości zbiorów poziomicowych funkcji wypukłej z wykładu.

3. Niech funkcja $f : C \to \mathbb{R}$, gdzie C – zbiór wypukły, będzie ciągła i spełnia dla dowolnych $x_1, x_2 \in C$ następujący warunek:
$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leqslant \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$
Pokaż, że f jest wypukła.

4. Niech I będzie dowolnym zbiorem indeksów, $C \in \mathbb{R}^n$ zbiorem wypukłym oraz niech każda z funkcji $f_i : C \to \mathbb{R}$, $i \in I$, będzie wypukła. Pokaż, że funkcja $h : C \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ zdefiniowana wzorem
$$h(x) = \sup_{i \in I} f_i(x)$$
jest również wypukła.

5. Niech $f : C \times A \to \mathbb{R}$, gdzie $C \subset \mathbb{R}^n$, $A \subset \mathbb{R}^m$ – zbiory wypukłe. Pokaż, że jeśli f jest wypukła, to funkcja $h : C \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ zdefiniowana wzorem
$$h(x) = \inf_{a \in A} f(x, a)$$
jest również wypukła.

6. Udowodnij następujące fakty (bez korzystania z pochodnych cząstkowych – w niektórych punktach mogą nie istnieć):
   (a) Niech funkcje $f_i : C \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$, (C – wypukły) będą wypukłe. Wtedy $g(x) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i(x)$ będzie wypukła dla dowolnych stałych nieujemnych α_i, $i = 1, \ldots, m$.
   (b) Niech funkcja $f : C \to \mathbb{R}$ (C – wypukły) będzie wklęsła i dodatnia. Wtedy $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ jest wypukła.
   (c) Niech funkcja $f : C \to \mathbb{R}$ będzie wypukła, a $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wypukła i niemalejąca. Wtedy funkcja $g \circ f$ jest wypukła. Jak należy zmodyfikować powyższe założenia, żeby zagwarantować, że $g \circ f$ będzie ściśle wypukła?

7. (a) Udowodnij, że dowolna norma w $\mathbb{R}^n$ jest funkcją wypukłą.
   (b) Udowodnij, że dla dowolnego zbioru wypukłego $C \subset \mathbb{R}^n$ odległość od zbioru C
$$d(x, C) = \inf_{y \in C} \|x - y\|,$$
   gdzie $\| \cdot \|$ oznacza jakąkolwiek normę w $\mathbb{R}^n$, jest funkcją wypukła. Podaj przykłady na to, że założenie o wypukłości zbioru C jest istotne oraz na to, że zamiast odległości od zbioru w dowolnej normie nie moglibyśmy rozważać odległości w dowolnej metryce.

8. Udowodnij, że jeśli funkcja $f : C \to \mathbb{R}$, określona na ograniczonym zbiorze wypukłym o niepustym wnętrzu, jest wypukła, to jest także ograniczona z dołu.

9. Udowodnij, że jeśli funkcja f wypukła posiada w punkcie x_0 wszystkie pochodne cząstkowe skończone, to jest tam różniczkowalna, czyli że
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - (f(x_0) + \nabla f(x_0)^T (x - x_0))}{x - x_0} = 0.$$
Uzasadnij, że hiperpłaszczyzna podpierająca wykres funkcji f w punkcie x_0 jest określona w sposób jednoznaczny wzorem
$$\nabla f(x_0)^T (x - x_0) - y + f(x_0) = 0.$$

10. Niech $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ określona będzie wzorem
$$f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 2z^4 + 2xy + 3y^2 z^2 + y^4 + 6x.$$
Korzystając z pochodnych cząstkowych pokaż, że jest ona ściśle wypukła. Następnie znajdź jej minimum globalne.

11. Pokaż, że funkcja n zmiennych
$$f(x_1, \ldots, x_n) = \left(\|(1 - x_1, x_1 - x_2, x_2 - x_3, \ldots, x_{n-1} - x_n, x_n - 2)\|_2\right)^2$$
jest wypukła. Znajdź jej minimum globalne.