Analiza wypukła, Matematyka, 2. st.
semestr zimowy 2019/2020
IV lista zadań

1. Pokaż, że pochodna kierunkowa funkcji $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\frac{\partial f}{\partial v}(x)$, ma następujące własności:
   (a) Jeśli f jest funkcją wypukłą, to $\frac{\partial f}{\partial v}(x)$ jest funkcją wypukłą kierunku v dla ustalonego x.
   (b) Jeśli $f = \max\{f_1, f_2\}$, gdzie $f_1, f_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ są wypukłe, to $\frac{\partial f}{\partial v}(x) = \max\{\frac{\partial f_1}{\partial v}(x), \frac{\partial f_2}{\partial v}(x)\}$ dla dowolnych $x \in \mathbb{R}$ takich, że $f_1(x) = f_2(x)$ oraz $v \in \mathbb{R}^n$.
   (c) Jeśli $f(x) = g(h(x))$, gdzie $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ są funkcjami klasy C_1, to $\frac{\partial f}{\partial v}(x) = g'(h(x))\frac{\partial h}{\partial v}(x)$.
2. Niech funkcje $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \ldots$ będą wypukłe i niech spełniają następujący warunek:
$$\lim_{k\to\infty} f_k(x_k) \to f(x) \quad \text{dla dowolnych } x_k \to x.$$
   Pokaż, że wtedy pochodne kierunkowe funkcji f_k oraz granicznej funkcji f spełniają następującą nierówność:
$$\limsup_{k\to\infty} \frac{\partial f_k}{\partial y_k}(x_k) \leqslant \frac{\partial f}{\partial y}(x) \quad \text{dla dowolnych } x_k \to x, y_k \to y.$$
   Znajdź przykład na to, że powyższej nierówności nie można zastąpić równością.
3. Wykaż, że dla dowolnej skalarnej funkcji wypukłej $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, subróżniczka $\partial f(x) = [f'_-(x), f'_+(x)]$ dla $x \in (a, b)$.
4. Oblicz $\partial f(x)$ dla $x \in \mathbb{R}^n$, jeśli funkcja f określona jest wzorem:
   (a) $f(x) = \|x\|_2$
   (b) $f(x) = \|x\|_1$
   (c) $f(x) = \|x\|_\infty$
5. Oblicz subróżniczkę funkcji $f(x, y) = |x + 2y + 1| + |x - 4y - 3| + |2x - y + 2|$. Korzystając z warunku koniecznego i dostatecznego istnienia ekstremum funkcji wypukłej, znajdź jej wszystkie ekstrema globalne.
6. Oblicz subróżniczkę funkcji $f(x, y) = 2^{\sqrt{5x^2-8xy+5y^2}}$ (uprzednio uzasadnij, że jest to funkcja wypukła).
7. Oblicz subróżniczkę funkcji $f(x, y, z) = \max\{5x^2-2xy+y^2+z^2-4xz, 5x^2+y^2-2xz-4xy+z^2, y^2+z^2\}$ (uprzednio uzasadnij, że jest to funkcja wypukła).
8. Niech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będzie funkcją wypukłą. Udowodnij, że:
   (a) Dla dowolnego zbioru ograniczonego (niekoniecznie zwartego) X, $\bigcup_{x\in X} \partial f(x)$ jest zbiorem ograniczonym.
   (b) Jeśli ciąg $\{x_k\}$ jest zbieżny do pewnego $x \in \mathbb{R}^n$ oraz dla każdego k, $d_k \in \partial f(x_k)$, to ciąg $\{d_k\}$ jest ograniczony, a dowolny punkt skupienia $\{d_k\}$ należy do $\partial f(x)$.
   (c) Uzasadnij, że w przypadku funkcji $f : C \to \mathbb{R}$, $C \subset \mathbb{R}^n$, teza podpunktu (a) będzie prawdziwa dla X zwartego zawartego w $\mathrm{Int}(C)$.
9. (a) Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie skalarną funkcją wypukła oraz niech a i b będą takimi liczbami rzeczywistymi, że $a < b$. Pokaż, że istnieje $c \in (a, b)$ takie że
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \in \partial f(c).$$
   (b) Niech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będzie funkcją wypukła oraz niech $x \neq y$ będą dowolnymi wektorami z $\mathbb{R}^n$. Pokaż, że istnieją liczba $\alpha \in (0, 1)$ oraz $d \in \partial f(\alpha x + (1 - \alpha)y)$ takie że
$$f(x) - f(y) = d^T(x - y).$$
10. Wiadomo, że w przypadku funkcji różniczkowalnej $\nabla f(x_0)$ określa kierunek, w którym wartość funkcji f najszybciej maleje w otoczeniu punktu x_0. Znając subróżniczkę $\partial f(x_0)$ dowolnej funkcji wypukłej $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ w punkcie x_0, który nie jest jej minimum, określ wersor v, dla którego $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$ jest najmniejsza.