Analiza wypukła, Matematyka, 2. st.
semestr zimowy 2019/2020
V lista zadań

1. Niech $f(x) = \|x\|^{\frac{3}{2}}$ (gdzie $x \in \mathbb{R}^n$ z normą euklidesową). Zauważ, że jedynym punktem stacjonarnym tej funkcji jest $x^* = 0$. Zastosuj do niej metodę najszybszego spadku ze stałą długością kroku $\alpha_k \equiv \alpha$. Pokaż, że dla dowolnego punktu startowego x_0 jest ona zbieżna do x^* w skończonej liczbie kroków lub nie jest zbieżna w ogóle.

2. Sprawdź, że funkcja $f(x) = \ln(e^x + e^{-x})$ ma dokładnie jedno minimum $x^* = 0$. Udowodnij, że metoda Newtona ze stałą długością kroku α nie jest zbieżna do x^* dla dowolnego $x_0 \neq x^*$, jeśli wartość α jest zbyt duża.

3. Rozważ funkcję $f(x, y) = x^2 + 4xy - 2y^2$.
   (a) Zauważ, że ma ona dokładnie jeden punkt stacjonarny, który nie jest minimum lokalnym ani maksimum lokalnym.
   (b) Pokaż, że jeśli $(x_0, y_0) = a(2, 1)$, to metoda najszybszego spadku ze stałą długością kroku α jest zbieżna wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha \in \left(0, \frac{1}{4}\right]$.
   (c) Pokaż, że jeśli $(x_0, y_0) = b(1, -2)$, to metoda najszybszego spadku ze stałą długością kroku α jest zbieżna wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha \in \left[-\frac{1}{6}, 0\right)$. Oczywiście z definicji $\alpha > 0$. Co zatem oznacza uzyskany wynik?
   (d) Pokaż, że jeśli $(x_0, y_0) = a(2, 1) + b(1, -2)$, $a, b \neq 0$, to metoda najszybszego spadku nie jest zbieżna dla żadnej (stałej) wartości α.
   (e) Oblicz wartości i wektory własne dla macierzy definiującej formę kwadratową $f(x, y)$. Korzystając z uzyskanych wyników wytłumacz, skąd się bierze szczególne zachowanie metody największego spadku w przypadkach z podpunktów (b) i (c).
   (f) Jaka wartość kroku byłaby wybrana w podpunktach (b), (c) i (d), gdyby wybór był dokonany w sposób optymalny? Czy metoda byłaby wtedy zbieżna?

4. Pokaż, że jeśli $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jest funkcją wypukłą posiadającą dokładnie jedno minimum x^*, to dowolna metoda gradientowa spełniająca założenia twierdzenia o zbieżności metod gradientowych z wykładu będzie dla dowolnego punktu startowego x_0 zbieżna do x^*.
   Wskazówka: Zacznij od pokazania, że zbiór poziomicowy $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leqslant f(x_0)\}$ jest zwarty (czyli domknięty i ograniczony).

5. Pokaż, że założenie (A) twierdzenia o zbieżności metod gradientowych z wykładu jest spełnione
   (a) dla metody najszybszego spadku, gdy ∇f jest funkcją ciągłą;
   (b) dla metody Newtona, gdy $\nabla^2 f(x)$ ma dla dowolnego $x \in \mathbb{R}^n$ wartości własne ograniczone z góry przez pewną stałą M.

6. Niech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będzie funkcją kwadratową wypukłą. Udowodnij, że optymalną długość kroku dla metody najszybszego spadku może być obliczona ze wzoru
$$\alpha_k = \frac{\nabla f(x_k)^T \nabla f(x_k)}{\nabla f(x_k)^T \nabla^2 f(x_k) \nabla f(x_k)}.$$

7. Zastosuj metodę najszybszego spadku z optymalnym wyborem długości kroku do funkcji
$$f(x, y) = 2x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 2y.$$
   Pokaż indukcyjnie, że dla $(x_0, y_0) = (0, 0)$, $(x_{2k}, y_{2k}) = \left(0, 1 - \frac{1}{5^k}\right)$. Korzystając z otrzymanego ciągu przybliżeń, wskaż minimum tej funkcji.

8. Udowodnij, że jeśli $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ jest ciągiem kroków metody najszybszego spadku z optymalnym wyborem długości kroku α_k dla dowolnej zadanej funkcji różniczkowalnej w sposób ciągły $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, wówczas dla każdego k wektor $x_{k+2} - x_{k+1}$ jest ortogonalny do wektora $x_{k+1} - x_k$.

9. Rozważ problem
$$\begin{array}{ll} \text{Znajdź minimum} & f(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1 - 3)^2 + \frac{1}{2}(x_2 - 4)^2 \\ \text{przy ograniczeniach} & -x_1 + x_2 \leqslant 2 \\ & x_1 + 2x_2 \leqslant 7 \\ & 2x_1 - x_2 \leqslant 4 \\ & x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \end{array}$$
   (a) Rozwiąż go, stosując metodę Franka-Wolfe'a z krokiem α_k obliczanym w sposób optymalny.
   (b) Rozwiąż go ponownie, stosując metodę rzutowania gradientu dla $s = 1$ oraz α_k obliczanego w sposób optymalny.

   W obu przypadkach zaznacz kolejne iteracje na rysunku.
   Wskazówka: W obu przypadkach minimum będzie znalezione w skończonej (i niewielkiej) liczbie kroków.