Analiza wypukła, Matematyka, 2. st.
semestr zimowy 2019/2020
VI lista zadań

1. Pokaż, że minimum funkcji $f(x,y) = x + y$ pod warunkami $(x-1)^2 + y^2 = 1$ oraz $(x-2)^2 + y^2 = 4$ nie może być wyznaczone metodą mnożników Lagrange'a, mimo że istnieje. Dlaczego?

2. Metodą mnożników Lagrange'a rozwiąż następujący problem:

$$\begin{array}{ll} \text{Znajdź minimum} & x_1 + x_2^2 + 2x_3 \\ \text{przy ograniczeniu} & 4x_1^2 + 9x_2^2 - 36x_3^2 = 36. \end{array}$$

3. Metodą mnożników Lagrange'a rozwiąż następujący problem:
Załóżmy, że dane są punkty w $\mathbb{R}^3$: (x_i, y_i, z_i), $i = 1, \ldots, m$. Znajdź punkt na płaszczyźnie

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

dla którego suma kwadratów odległości (w metryce euklidesowej) od punktów (x_i, y_i, z_i) jest najmniejsza.

4. Stosując warunki Karusha-Kuhna-Tuckera znajdź rozwiązanie problemu

$$\begin{array}{ll} \text{Znajdź minimum} & x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 + 2x_2 \\ \text{przy ograniczeniu} & x_1^2 + (x_2 - 1)^2 \leqslant 1. \end{array}$$

5. Stosując warunki Karusha-Kuhna-Tuckera znajdź rozwiązanie problemu

$$\begin{array}{ll} \text{Znajdź minimum} & x_1^2 + 2x_2^2 - x_3 \\ \text{przy ograniczeniach} & 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ & x_2 \geqslant x_1^2 - 2x_1 + 2. \end{array}$$

6. Stosując warunki Karusha-Kuhna-Tuckera znajdź rozwiązanie problemu

$$\begin{array}{ll} \text{Znajdź minimum} & x_1(x_2^2 - 1) \\ \text{przy ograniczeniach} & x_2 \geqslant x_1^2, \\ & x_2 \leqslant x_1 + 1. \end{array}$$

7. (a) Stosując warunki Karusha-Kuhna-Tuckera uzasadnij, że rozwiązaniem problemów

$$\begin{array}{ll} \text{Znajdź maksimum (minimum)} & q(x) = x^T A x \\ \text{przy ograniczeniu} & \|x\|_2 \leqslant a, \end{array}$$

gdzie A jest pewną macierzą rzeczywistą symetryczną, zaś a – pewną liczbą rzeczywistą, jest zawsze wektor własny macierzy A odpowiadający największej (najmniejszej) wartości własnej, o długości a.

(b) Korzystając z części (a), znajdź największą i najmniejszą wartość funkcji

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - 8x_1x_3 + 4x_2x_3$$

na zbiorze

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leqslant 4\}.$$