

Elementy teorii gier,
Matematyka Stosowana
semestr zimowy 2022/2023
I lista zadań

1. Rozważ następującą grę dwóch graczy: Na początku gry każdy z graczy posiada po 3 kulki, a przed nimi stoi puste wiadro. Na każdym etapie gry (grę zaczyna Gracz 1.) gracz może wrzucić dowolną liczbę swoich kulek do wiadra albo wyjąć jakieś kulki z wiadra (jeśli jakieś tam są). Ma jednak następujące ograniczenie: Jeśli akcja a_t Gracza 1. oznacza, że dołożył na etapie t a_t kulek do wiadra, a akcja $-a_t$ – że wyjął a_t kulek, podobnie z akcjami b_t i $-b_t$ drugiego gracza, to ciąg $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$ jest rosnący. Gra kończy się, gdy któryś z graczy nie może wykonać żadnego ruchu. Wypłatami są liczby kulek, które w momencie zakończenia gry posiadają gracze.

Narysuj drzewo tej gry wraz z pozycjami poszczególnych graczy i wypłatami.

2. Dwóch dżentelmenów z Południa Stanów Zjednoczonych gra w następującą grę: Na początku gry na stole leży stos 8 żetonów. Gracze 1. i 2. na przemian zdejmują ze stosu całkowite liczby żetonów, stosując się do następujących reguł:

- (a) Za każdym razem zdejmują całkowitą liczbę żetonów z przedziału od 1 do 5.
- (b) W dowolnym ruchu mogą zdjąć wyłącznie taką liczbę żetonów, jakiej do danej chwili nie zdejmował żaden z graczy.

Gra kończy się, gdy na stole nie ma już żetonów lub gdy któryś z graczy nie może już wykonać żadnego ruchu. Gracz, który powinien na tym etapie wykonać swoje posunięcie, przegrywa na rzecz przeciwnika liczbę niewolników równą liczbie żetonów wciąż pozostających na stole.

Narysuj drzewo tej gry wraz z pozycjami poszczególnych graczy i wypłatami.

3. Rozważ następującą grę dwóch graczy – dyktatora i opozycji: Dyktator na każdym etapie gry stawia przed sądem i każe rozstrzelać jednego lub kilku z czterech liderów opozycji, natomiast opozycja stara się bronić przed całkowitą likwidacją, wzniecając powstanie, mające na celu obalenie (oraz postawienie przed sądem i rozstrzelanie) dyktatora. Na każdym nieparzystym etapie gry dyktator wybiera, ilu z liderów opozycji zgładzić (na każdym etapie zabija przynajmniej jednego). Jeśli zdecyduje się zgładzić wszystkich, którzy są jeszcze przy życiu, USA dokonują interwencji, w wyniku której ginie i dyktator i przywódca opozycji, a władzę przejmuje marionetkowy rząd stworzony przez Amerykanów. Na parzystych etapach opozycja próbuje wywołać powstanie. Ponieważ jednak dogadanie się różnych odłamów opozycji jest trudne, powstanie może być przeprowadzone albo przez wszystkie działające (tzn. takie, które mają żywego lidera) jej odłamy, albo tylko przez część (jeden, dwa lub trzy, jeśli tyłu liderów opozycji jeszcze żyje – zawsze jednak przynajmniej jeden popiera powstanie). W zależności od tego, ilu z liderów opozycji popiera dane powstanie, szansa jego sukcesu (czyli wygranej opozycji i zgładzenia dyktatora) jest równa liczbie popierających podzielonej przez 4. Jeśli powstanie przegrywa, liderzy frakcji opozycji, które poparły powstanie, zostają natychmiast zgładzeni (ale to nie wywołuje nigdy amerykańskiej interwencji). Gra kończy się, gdy dyktator zostaje zgładzony lub gdy wszyscy liderzy opozycji zostaną zgładzeni. Wypłatą dyktatora jest 1 lub -1 , w zależności od tego, czy żyje, opozycji – również -1 lub 1, w zależności od tego, czy ktokolwiek z przywódców opozycji przeżył.

Narysuj drzewo tej gry wraz z pozycjami poszczególnych graczy i wypłatami.

4. Rycerz i smok grają w następującą grę: Na początku gry smok ma 3 głowy. Na nieparzystych etapach rycerz obcina od 1 do wszystkich głów smoka. Ponieważ dekapitacja to ciężka fizyczna praca, sił starcza mu na obcięcie co najwyżej 4 głów w trakcie całej rozgrywki. Na parzystych etapach gry smok broni się na jeden z dwóch sposobów: może zaatakować rycerza (zabijając go z prawdopodobieństwem równym liczbie posiadanych aktualnie głów podzielonej przez 3) lub posmarować się magiczną maścią na porost głów (wtedy odrastają mu wszystkie głowy odcięte na poprzednim etapie poza jedną). Nie może zastosować obu metod obrony jednocześnie. Gra kończy się zwycięstwem smoka, jeśli rycerz zginie lub nie ma już siły na odrąbywanie smokowi kolejnych głów (takiego osłabionego rycerza smok zabija jednym machnięciem ogona). Gra kończy się zwycięstwem rycerza, jeśli odciął smokowi wszystkie głowy, a ten nie może doprowadzić do odrośnięcia którejkolwiek z nich.

Narysuj drzewo tej gry wraz z pozycjami poszczególnych graczy i wypłatami.

5. W grze uczestniczą dwaj gracze: samobójca i jego żona, i toczy się ona na przestrzeni dwóch dni. W pierwszym dniu żona wychodzi do pracy, zostawiając męża w domu. On podejmuje decyzję, czy pozbawić się życia tego dnia, czy nie. Żona, wiedząc, co mu chodzi po głowie, ale nie wiedząc, czy zdecydował się zrobić sobie kuku, decyduje się, czy wezwać do niego karetkę. Jeśli karetka nie przyjedzie, a samobójca zdążył się powiesić, umiera, kończąc grę. W przeciwnym wypadku (nic sobie nie zrobił lub karetka przyjechała i został odratowany), gra toczy się dalej. Drugiego dnia sytuacja się powtarza – mąż decyduje się, czy ze sobą skończyć, a żona, czy zadzwonić na pogotowie. Różnica jest tylko taka, że jeśli poprzedniego dnia wezwała karetkę bez potrzeby, dzisiaj nie może już tego zrobić. Ponieważ głównym celem życiowym samobójcy jest pozbawienie się tego życia, jego wypłatą jest 1, jeśli mu się to udało i 0, jeśli przeżył te dwa dni. Żona też nie ma nic przeciwko samobójstwu męża, bo dostanie pieniądze z jego polisy na życie. Dostanie je jednak tylko wtedy, gdy choć jednego dnia starała się uratować męża. W związku z tym jej wypłata to 10, jeśli mąż się zabił, a ona spróbowała go ratować lub 0 w każdym innym przypadku, minus 1 za każdą wizytę karetki.

Narysuj drzewo tej gry, zaznacz pozycje graczy i zbiory informacyjne oraz wypłaty.

6. Angelika i Belzebub grają w następującą grę: Na stole przed nimi leżą dwie karty: As i Król (gracze nie widzą ich wartości). Na początek gry Angelika i Belzebub kładą na stole po 1 Euro. Następnie Angelika wybiera jedną z kart, patrzy na jej wartość i dokłada do pieniędzy na stole 2 lub 4 Euro. Belzebub decyduje następnie czy „zrezygnować”, czy „sprawdzić”. Jeśli zrezygnuje, Angelika zabiera wszystkie pieniądze. Jeśli zdecyduje się na sprawdzenie, musi dołożyć sumę pieniędzy równą tej, którą wyłożyła Angelika. W tej sytuacji Angelika wygrywa, jeśli kartą, którą wybrała, jest As. W przeciwnym wypadku wygrywa Belzebub.

Narysuj drzewo tej gry, zaznacz pozycje graczy i zbiory informacyjne oraz wypłaty.

7. Dwóch graczy uczestniczy w pojedynku na pistolety, który przeprowadzany jest na następujących zasadach:

Na początku losowane jest (z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$ dla obu możliwości), czy oba pistolety będą załadowane ostrą amunicją, czy do 1. pistoletu załadowane zostaną ślepaki. Pierwszy strzelający zawsze używa 1. pistoletu. Następnie Gracz 1. wybiera (nie znając wyników losowania), czy ma strzelać jako pierwszy, jako drugi, czy zrezygnować z pojedynku. Jeśli wybrał, że strzela jako pierwszy, zabija Gracza 2., jeśli strzelał z ostrej amunicji lub nic mu nie robi, jeśli strzelał ze ślepej. Jeśli Gracz 2. przeżył, strzela do Gracza 1. z 2. pistoletu i zabija go z prawdopodobieństwem $\frac{2}{3}$. Podobnie, jeśli Gracz 1. wybrał, że strzela jako drugi, zostaje zabity z prawdopodobieństwem $\frac{2}{3}$, jeśli do 1. pistoletu załadowano ostrą amunicję lub nic mu się nie dzieje, jeśli w pistolecie był ślepy nabój. Jeśli przeżył, zabija Gracza 2.

Wypłaty graczy to +1, jeśli uczestniczyli w pojedynku, ale przeżyli i -1, jeśli zginęli. Jeśli pojedynek się nie odbył, wypłaty obu graczy są równe 0.

Narysuj drzewo tej gry. Zaznacz na nim wypłaty i pozycje graczy oraz zbiory informacyjne.

8. Gra w „białoruską ruletkę” jest grą dwóch graczy. Zaczyna się od tego, że gracz 1. wkłada do jednej z trzech komór rewolweru (on wie, do której) kulę. Następnie gracz 2., który nie wie, do której z komór został włożony nabój, przekręca bębenek o jedną komorę lub dwie, i strzela sobie w głowę. Na trzecim (i ostatnim) etapie gry gracz 1., wiedząc, czy gracz 2. się zastrzelił, ale nie wiedząc, o ile przekręcił bębenek, robi to co gracz 2. na poprzednim etapie – przekręca bębenek o 1 lub 2 komory, i strzela sobie w głowę. (oczywiście gracz 1. nie zapomina, gdzie włożył kulę na początku). Grę przegrywa ten z graczy, który się zastrzelił (może być też remis (wypłaty 0 dla każdego z graczy), jeśli żaden nie osiągnął tego sukcesu).

(a) Narysuj drzewo tej gry, zaznacz pozycje poszczególnych graczy oraz zbiory informacyjne.

(b) Jeden z graczy jest w stanie zapewnić sobie, że nie zginie. Który z graczy? Jakiej strategii musi w tym celu używać?