

Elementy teorii gier,  
Matematyka Stosowana  
semestr zimowy 2022/2023  
II lista zadań

1. (a) Podaj przykład gry dwuosobowej, w której każdy z graczy ma strategię słabo zdominowaną, i ta para strategii zdominowanych jest równowagą w grze (najlepiej żeby była najkorzystniejszą z równowag, jakie istnieją w tej grze).
  - (b) Pokaż, że jeśli iteracyjnie usuwamy z gry strategie silnie zdominowane, to nie możemy usunąć żadnej równowagi Nasha.
  - (c) Uzasadnij, że dowolna równowaga Nasha w grze, z której iteracyjnie usunęliśmy strategie słabo zdominowane jest też równowagą w wyjściowej grze.
2. Podaj przykład gry dwuosobowej (z przeliczalnymi zbiorami strategii graczy), w której wszystkie strategie każdego z graczy są zdominowane.
  3. Znajdź wszystkie równowagi Nasha w dwuosobowej grze macierzowej o macierzach wypłat graczy

$$\bullet \begin{bmatrix} (1, -1) & (4, 3) & (-2, 2) \\ (2, 0) & (-1, 3) & (-1, 5) \\ (2, 5) & (0, 1) & (1, 0) \end{bmatrix},$$
$$\bullet \begin{bmatrix} (1, -1) & (1, 2) & (2, 3) \\ (2, 1) & (2, 3) & (3, 2) \\ (0, 1) & (4, 2) & (1, 0) \end{bmatrix}.$$

Następnie iteracyjne usuń z każdej z powyższych gier strategie (silnie) zdominowane. Tylko dla jednej z powyższych gier jesteśmy w stanie znaleźć w ten sposób rozwiązanie gry. Czy umiesz wskazać jakąś różnicę pomiędzy tymi grami, która sprawia, że w jednej z nich nie jest to możliwe?

4. Znajdź wszystkie równowagi Nasha w 3-osobowej grze, w której gracz 1. wybiera wiersz, gracz 2., kolumnę, a gracz 3. warstwę macierzy wypłat

$$A(\cdot, \cdot, 1) = \begin{bmatrix} (2, 0, 0) & (1, 2, 2) \\ (-1, 2, 1) & (1, 5, 2) \\ (1, 1, 0) & (0, 1, 2) \end{bmatrix} \quad A(\cdot, \cdot, 2) = \begin{bmatrix} (1, 4, 3) & (1, 3, 0) \\ (1, 1, 4) & (0, 3, 0) \\ (0, 2, 3) & (3, 0, 0) \end{bmatrix}$$

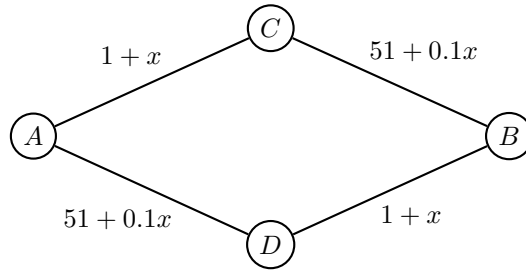
Czy są w tej grze jakieś strategie zdominowane (słabo lub silnie)?

5. Rozważ dwuosobową grę macierzową z macierzą wypłat

$$\begin{bmatrix} (1, 1) & (2, 2) & (0, 3) \\ (2, 2) & (2, 1) & (3, 2) \\ (0, 3) & (3, 0) & (1, 1) \end{bmatrix}.$$

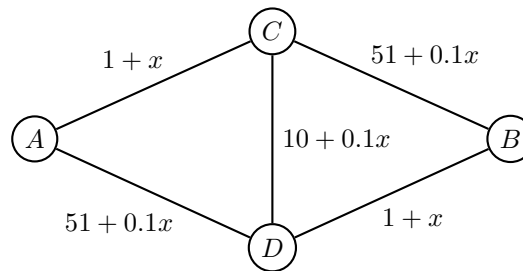
Sprawdź, że ma 2 różne równowagi Nasha. Następnie pokaż, że iteracyjnie wykreślając z tej gry strategie słabo zdominowane, grę redukuje się do jednej z par strategii w równowadze, przy czym w zależności od kolejności wykreślania strategii zdominowanych, można otrzymać dowolną z równowag. Co się stanie, jeśli gracze będą wykreślali strategie w taki sposób, że przy jednym wykreślaniu muszą jednocześnie wykreślić wszystkie strategie słabo zdominowane? Na to ostatnie pytanie odpowiedz dla przypadku, gdy pierwszym wykreślającym jest gracz 1. oraz dla przypadku, gdy pierwszym wykreślającym jest gracz 2.

6. (Paradoks Braessa) Dwie drogi łączą miasto A z miastem B: północna droga przez miasto C oraz południowa przez miasto D. Czasy potrzebne na przejechanie poszczególnych ich odcinków zależą od liczby samochodów  $x$  używających danych dróg w sposób, który możemy odczytać z poniższego rysunku:



Dla przykładu, czas potrzebny na dotarcie z A do C jest równy  $1 + x$ , gdzie  $x$  jest liczbą samochodów używających tej drogi w danej minucie, natomiast czas potrzebny na przejechanie z C do B jest równy  $51 + 0.1x$ , gdzie  $x$  jest liczbą samochodów używających tej drogi w danej minucie. Każdy gracz wybiera, jaką drogą przejechać z miasta A do B, starając się zminimalizować czas zużyty na dojazd. 60 samochodów wyrusza w ciągu minuty w drogę z miasta A do miasta B. Zakładamy, że żadne dodatkowe samochody nie pojawiają się na drodze pomiędzy miastami ani w miastach C i D.

- Opisz powyższą sytuację formalnie jako grę niekooperacyjną w postaci strategicznej.
- Wskaż równowagi Nasha w tej grze. Ile czasu zabiera pojedynczemu kierowcy dotarcie z miasta A do miasta B, jeśli używa strategii w równowadze?
- Założmy, że zbudowano nową drogę między miastami C i D, przy czym czas potrzebny na jej pokonanie wynosi  $10 + 0.1x$  (patrz rysunek poniżej). Zakładamy, że można nią przejechać z miasta C do D, ale nie w przeciwną stronę.



Wskaż równowagi Nasha w tej zmodyfikowanej grze. Ile czasu zabiera przejechanie z miasta A do B, jeśli gracze używają strategii w równowadze? Czy wybudowanie dodatkowej drogi przyspiesza dojazd z A do B?