Elementy teorii gier,
Matematyka Stosowana
semestr zimowy 2022/2023
III lista zadań

1. Znajdź wszystkie równowagi Nasha (w strategiach mieszanych) w dwuosobowych grach macierzowych z macierzami wypłat
   - $\begin{bmatrix} (4,-1) & (2,2) & (1,5) \\ (1,4) & (2,-1) & (3,0) \\ (2,2) & (6,0) & (0,1) \end{bmatrix}$,
   - $\begin{bmatrix} (1,0) & (4,-2) & (1,-1) & (0,1) \\ (0,-1) & (2,1) & (1,2) & (0,0) \\ (2,1) & (1,2) & (2,0) & (1,3) \\ (-1,1) & (0,-1) & (0,0) & (3,-1) \end{bmatrix}$,
2. Znajdź standardową metodą równowagi Nasha w dwuosobowej grze macierzowej z macierzą wypłat
$$\begin{bmatrix} (1,3) & (4,-2) & (3,0) & (5,1) \\ (2,0) & (2,2) & (0,1) & (4,1) \\ (0,1) & (1,1) & (3,2) & (3,-1) \end{bmatrix}$$
przy założeniu, że możesz usuwać również strategie słabo zdominowane. Następnie pokaż, że w grze istnieje nieskończenie wiele równowag Nasha, w których z niezerowym prawdopodobieństwem jeden z graczy używa wykreślonej strategii.
3. Zgodnie z twierdzeniem Nasha w grze macierzowej zawsze istnieje równowaga. Nie jest to jednak już prawdą, gdy zbiory strategii graczy są przeliczalne. Podaj przykład gry dwuosobowej ze skończonym zbiorem strategii pierwszego gracza oraz przeliczalnym zbiorem strategii drugiego, która nie ma równowagi nawet w strategiach mieszanych. Uzasadnij, że tak jest.
4. Rozważ grę dwumacierzową zdefiniowaną przy pomocy następujących macierzy $n \times n$ ($n \geqslant 3$):
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
Pokaż, że w jedynej równowadze Nasha w tej grze każdy z graczy używa wszystkich wierszów (kolumn) z tym samym prawdopodobieństwem.
5. (Dylemat ochotnika) Dziesięć osób zostało zaaresztowanych w związku z popełnieniem pewnego przestępstwa. Przesłuchujący składa podejrzanym następującą ofertę: Jeśli choć jeden z nich się przyzna, każdy przyznający się dostanie wyrok jednego roku więzienia, a wszyscy pozostali zostaną wypuszczeni. Jeśli nikt się nie przyzna, policja zaangażuje w dochodzenie takie środki, że w końcu będzie miała dowody pozwalające na skazanie wszystkich podejrzanych na dziesięć lat więzienia.
   (a) Sformułuj grę niekooperacyjną w postaci strategicznej, która opisuje powyższą sytuację.
   (b) Znajdź wszystkie równowagi Nasha w strategiach czystych. Jaka jest intuicyjna interpretacja takich równowag?
   (c) Znajdź symetryczną równowagę w strategiach mieszanych. Jakie jest w niej prawdopodobieństwo, że nie będzie żadnego ochotnika, który chciałby się przyznać?
   (d) Załóżmy, że liczba podejrzanych jest równa n. Znajdź symetryczną równowagę Nasha w strategiach mieszanych w tak zmodyfikowanej grze. Jaka jest granica przy n dążącym do nieskończoności, że nie będzie ochotników? Co rozważany przykład mówi o zgłaszaniu się na ochotnika, jeśli grupa potencjalnych ochotników jest duża?
6. W grze w rodzinną wendettę uczestniczą dwaj gracze: Rodzina Corleone i Rodzina Soprano. Przed rozpoczęciem gry Corleone mordują jednego z członków rodziny Soprano. Na każdym z kolejnych etapów gry zabija (członków drugiej rodziny) rodzina, która nie zabijała w poprzednim, przy czym (zgodnie z tradycją) nie może zamordować więcej osób niż 2 razy tyle, ile przeciwna rodzina na poprzednim etapie gry. Nie może także (ze względów

technicznych) zabić więcej osób, niż sama posiada w swoich szeregach. Gra kończy się, gdy w jednej z rodzin nie zostanie nikt przy życiu. „Wypłatą” wygrywającego jest liczba osób w jego rodzinie, która została przy życiu (przegrywającego – 0). Narysuj drzewo tej gry, zaznacz na nim pozycje poszczególnych graczy, a następnie znajdź równowagę Nasha w tej grze, przy założeniu, że przed pierwszym morderstwem (tym przed rozpoczęciem gry) w każdej z rodzin było po 4 osoby.

Narysuj drzewo tej gry, zaznacz pozycje poszczególnych graczy, a następnie znajdź przy pomocy indukcji wstecznej równowagę w tej grze.

7. Rozważ następującą grę dwóch graczy:

   Adrian wyzywa Bronka na pojedynek. którego zasady opisane są poniżej.

   - Na początku Bronek wybiera, kto (on czy przeciwnik) będzie wybierał typ broni, z której będą do siebie strzelać.
   - Następnie osoba przez niego wskazana wybiera jeden z dwóch rodzajów broni: pistolety albo Kałasznikowy.
   - W końcu gracze do siebie strzelają używając wybranej broni (takiej samej dla obu). Jako pierwszy strzał oddaje ten, który nie wybierał typu broni. W efekcie przeciwnik zostaje trafiony i ginie lub nie zostaje trafiony i również strzela. Prawdopodobieństwo oddania skutecznego strzału przy pomocy Kałasznikowa wynosi 90%. W przypadku strzału z pistoletu, prawdopodobieństwo zabicia przeciwnika wynosi 70%, jeśli strzelał Bronek lub 20%, jeśli strzelał Adrian.

   Zakładamy, że jest to gra z pełną informacją. Celem Bronka jest zminimalizowanie prawdopodobieństwa bycia zabitym, celem Adriana, zmaksymalizowanie tego prawdopodobieństwa.

   Narysuj drzewo tej gry, zaznacz pozycje poszczególnych graczy, a następnie znajdź przy pomocy indukcji wstecznej równowagę w tej grze.

8. Dwaj gracze siedzą i piją samogon szklankami. Do wypicia mają 1 butelkę, czyli 4 szklanki. Gracze wykonują ruchy na przemian, zaczynając od Gracza 1. Na każdym etapie gracz ma do wyboru: wypić jedną, dwie, trzy lub cztery szklanki lub zagryźć. Musi się przy tym stosować do następujących reguł: Wypić może co najwyżej tyle, ile zostało w butelce. Nie może pić i zagryzać jednocześnie. Zagryzać może wyłącznie, jeśli poprzednim jego ruchem było picie. Gra kończy się, gdy butelka zostanie opróżniona. Po opróżnieniu butelki nie wolno też już zagryzać. Niestety gracze mają bardzo słabe żołądki, i po wypiciu więcej niż jednej szklanki samogonu (na jednym etapie, bądź kilku kolejnych) muszą zagryźć – jeśli nie zagryzą, zwymiotowują wszystko, co wypili i zjedli do tej pory („muszą” w tym wypadku oznacza, że wolno im wypić więcej, ale kończy się to zwymiotowaniem wszystkiego na etapie, na którym powinni zagryźć, w szczególności jeśli wypili więcej niż jedną szklankę tuż przed zakończeniem gry, i nie mieli możliwości zagryzienia, zwymiotowują wszystko). Wypłatą każdego z graczy jest liczba szklanek, które wypił i nie zwymiotował.

   Narysuj drzewo tej gry, zaznacz pozycje poszczególnych graczy, a następnie znajdź przy pomocy indukcji wstecznej równowagę w tej grze.

9. Rozważ grę pozycyjną dwóch graczy, w której na pierwszym etapie Gracz 2. wybiera L lub P (pójść w lewo lub pójść w prawo), na drugim etapie Gracz 1., nie znając wyboru Gracza 2., wybiera L lub P, a na trzecim etapie Gracz 2. znowu wybiera L lub P, nie znając ani wyboru przeciwnika, ani swojej wcześniejszej decyzji. Na końcu Gracz 2. wypłaca 1.: 2, jeśli zagrali LLL (to są wybory graczy w kolejności ich podejmowania), 3, jeśli zagrali LLP, 4, jeśli LPL, 1, jeśli LPP lub PLL, 5, jeśli PLP, 6, jeśli PPL, i 0, jeśli wybrali PPP. Dla takiej gry:

   (a) narysuj drzewo tej gry i zaznacz na nim pozycje poszczególnych graczy oraz zbiory informacyjne;

   (b) sprowadź ją do postaci strategicznej i znajdź równowagę Nasha;

   (c) pokaż, że używając strategii postępowania nie da się zagrać tej równowagi.

10. W grze uczestniczy dwóch graczy: Marsjanie (Gracz 1.) i Ziemianie (Gracz 2.). Przed rozpoczęciem gry do trzech Ziemian siedzących obok siebie na ławeczce i pijących wódkę dosiada się z lewej strony Marsjanin. Na każdym nieparzystym etapie gry Marsjanie podmieniają jednego Ziemianina na Marsjanina. Na parzystych etapach Ziemianie bronią się przed atakiem, mordując Marsjan. Na jednym etapie mogą jednak zabić wyłącznie (dowolnie dużą, może być jednoosobową) grupę Marsjan siedzących obok siebie (tzn. takich że nie siedzą między nimi Ziemianie – puste miejsca po zabitych nas nie interesują), ale kogoś zabić muszą. Gra kończy się, gdy na ławeczce pozostają wyłącznie Marsjanie lub wyłącznie Ziemianie. Wypłatami graczy są liczby osobników ich rasy pozostałych przy życiu.

    (a) Narysuj drzewo tej gry i zaznacz pozycje poszczególnych graczy. Następnie znajdź przy pomocy indukcji wstecznej równowagę w tej grze.

(b) Pokaż, że dla modyfikacji tej gry, w której Ziemian jest więcej niż trzech, Marsjanie mają strategię zwycięską (gwarantującą przetrwanie ich rasy i wyniszczenie Ziemian), niezależnie od liczności Ziemian **Wskazówka:** Na podstawie drzewa z podpunktu (a) zidentyfikuj pozycje, które gwarantują Marsjanom zwycięstwo (udowodnij swoją hipotezę indukcyjnie).

11. Zamień grę z zadania 6. na 1. liście zadań na postać strategiczną. Znajdź w niej równowagę Nasha. Następnie zapisz ją przy pomocy strategii postępowania.

12. Znajdź równowagę Nasha w grze z zadania 5. na 1. liście zadań, stosując uogólniony algorytm indukcji wstecznej. Zapisz strategie (czyste) tworzące tę równowagę.

13. W grze uczestniczy dwóch przedsiębiorców, starających się o ten sam kontrakt. Na kolejnych etapach gry każdy wręcza koperty z łapówkami urzędnikom na dwóch szczeblach, najpierw urzędnikowi niższego, potem wyższego szczebla. Każdy ma do dyspozycji 3 koperty: z 1 mln PLN, z 2 mln. PLN, z 3 mln. PLN (każda może być wykorzystana tylko raz). Zakładamy, że jako pierwszy kopertę zawsze wręcza 1. przedsiębiorca, ale 2. przedsiębiorca, wręczając swoją kopertę, nie wie, co urzędnik dostał od pierwszego. Jeśli urzędnik na danym etapie dostał koperty z różnymi kwotami, zachowuje tę z większą kwotą, a wobec tego, który dał mniej udaje nieprzekupnego; następnie odrzuca ofertę tego, który dał mniej (i gra się kończy zwycięstwem tego „lepszego", nie ma już kolejnego etapu). Jeśli gracze dadzą takie same łapówki, obaj są zakwalifikowani do kolejnego etapu gry. Jeśli obaj urzędnicy przepuścili obie oferty dalej, zwycięska oferta wybierana jest na drodze losowania (z równymi szansami dla obu). Wypłatą gracza, który dostał kontrakt, jest 20 mln. PLN minus łapówki, które dał. „Wypłatą" przegrywającego – 0 minus łapówki, które dał.

    Narysuj drzewo tej gry, zaznacz pozycje graczy oraz zbiory informacyjne. Następnie (uogólnionym) algorytmem indukcji wstecznej znajdź równowagę w tej grze. Zapisz ją przy pomocy strategii postępowania.