Elementy teorii gier,
semestr zimowy 2022/2023
IV lista zadań

1. Znajdź równowagę w strategiach czystych w grze dwóch graczy ze zbiorami strategii $X = Y = [0, \infty)$ oraz funkcjami wypłaty $u_1(x, y) = \ln(x + 2) - xy$, $u_2(x, y) = -(x - y)^2$.

2. Znajdź równowagę w strategiach czystych w grze dwóch graczy ze zbiorami strategii $X = Y = [0, 1]$ oraz funkcjami wypłaty $u_1(x, y) = \frac{4}{3}x^3 + xy^2 - 2x^2y - x^2 + xy$, $u_2(x, y) = 2y - 2xy - y^2$.

3. Znajd wszystkie równowagi Nasha w grze dwuosobowej ze zbiorami strategii graczy $X = Y = [0, 1]$ oraz funkcjami wypłaty $u_1(x, y) = -(x - y^2)^2$ i $u_2(x, y) = \frac{xy^2}{2} - y^3 + y^2$.

4. Znajdź równowagę w strategiach mieszanych w grze dwuosobowej ze zbiorami strategii graczy $X = Y = [0, 1]$ oraz funkcjami wypłaty $u_1(x, y) = -(4x - 3y)^2$ i $u_2(x, y) = (y - x^2)^2$.
Wskazówka: Wypłata drugiego gracza dla każdej strategii czystej, z której będzie korzystać z niezerowym prawdopodobieństwem w swojej strategii mieszanej, musi być taka sama i największa z możliwych przy ustalonej (równowagowej) strategii gracza 1.

5. Rozważ grę dwuosobową ze zbiorami strategii graczy $X = Y = [0, 1]$ oraz funkcjami wypłaty
$$u_1(x, y) = -(x - y)^2, \quad u_2(x, y) = \begin{cases} y & \text{dla } x < \frac{1}{2} \\ 1 - y & \text{dla } x \geqslant \frac{1}{2} \end{cases}.$$
Pokaż, że ta gra nie ma równowagi Nasha nawet w strategiach mieszanych.
Wskazówka: Zacznij od pokazania, że najlepsza odpowiedź gracza 1. na dowolną strategię mieszaną gracza 2. jest strategią czystą.

6. Znajdź wartość dolną i górną oraz strategie bezpieczeństwa w strategiach czystych, a następnie równowagę oraz wartość w strategiach zrandomizowanych dla gry macierzowej o sumie zerowej o macierzy wypłat pierwszego gracza
   (a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 & 3 \\ 1 & -3 & -3 & 4 \\ -1 & 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$,
   (b) $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 5 & 3 \\ 1 & 5 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & -2 \end{bmatrix}$.

7. Rozważ następującą grę: każdy z dwóch graczy wybiera liczbę naturalną. Gracz, który wybrał większą, dostaje złotówkę od przeciwnika. Jest to gra o sumie zerowej z przeliczalnymi zbiorami strategii graczy. Pokaż, że wartość dolna tej gry (również w strategiach mieszanych) jest równa -1, a wartość górna tej gry (jak poprzednio, też w strategiach mieszanych) jest równa 1.