Elementy teorii gier,
semestr zimowy 2022/2023
V lista zadań

1. Rozważ dwuosobową grę z niepełną informacją, w której gracz 1. ma dwa typy (typ 1. i typ 2.), a gracz 2. tylko jeden. Gracz 1. zna swój typ, podczas gdy gracz 2. wierzy, że gracz 1. ma typ 1. z prawdopodobieństwem $\frac{3}{4}$, a typ 2. z prawdopodobieństwem $\frac{1}{4}$. W obu typach każdy z graczy ma po dwie strategie czyste, a wypłaty graczy w zależności od typu gracza 1. opisane są przy pomocy macierzy
$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} (1,1) & (0,0) \\ (0,0) & (1,1) \end{bmatrix},$$
$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} (0,2) & (1,0) \\ (1,0) & (0,4) \end{bmatrix}.$$
   (a) Narysuj drzewo postaci ekstensywnej tej gry.
   (b) Zamień ją na postać strategiczną i znajdź wszystkie równowagi Nasha w tej grze. Zapisz je przy pomocy strategii postępowania.

2. Dwaj gracze próbują przesłać dane przy wykorzystaniu jednej z dwóch sieci: 4G lub WiFi. Ilość danych (w Mbit/s), które mogą przesłać za pomocą sieci 4G jest stała i równa $v > 0$. Ilość danych, którą gracz i może przesłać za pomocą sieci WiFi zależy od tego, czy gracz $j \neq i$ przesyła swoje dane w tym samym czasie, a także od jakości kanałów, których gracze używają do transmisji w następujący sposób:
$$u_i^{WiFi} = \frac{h_i}{1 + h_j s_j}, \quad \text{gdzie } s_j = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } j \text{ używa 4G,} \\ 1, & \text{jeśli } j \text{ używa WiFi,} \end{cases}$$
przy czym h_i, h_j są wskaźnikami jakości kanałów graczy. Gracze wiedzą, że rozkłady jakości ich kanałów są niezależne o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[0, 100]$.
   (a) Opisz powyższą grę jako grę z niepełną informacją z nieskończoną liczbą typów graczy.
   (b) Ponieważ tak zdefiniowanej gry nie jesteśmy w stanie zapisać jako gry w postaci ekstensywnej, równowagę bayesowską trzeba liczyć z definicji. Pokaż, że dla dowolnego v gra ma symetryczną równowagę, w której każdy z graczy wybiera WiFi, jeśli jego h_i jest większe bądź równe od pewnej stałej α oraz 4G w przeciwnym wypadku. Znajdź równanie na stałą α.
   (c) Jak będzie wyglądała równowaga w grze n graczy, jeśli dla takiego przypadku $u_i^{WiFi} = \frac{h_i}{1+\sum_{j=1}^{n} h_j s_j}$?

3. W modelu Harsanyi'ego gracze, dowiedziawszy się, jaki mają typ, obliczają prawdopodobieństwa występowania poszczególnych typów pozostałych graczy na podstawie rozkładu prawdopodobieństwa a priori p przy pomocy wzoru $p_i(t_{-i} \mid t_i) = p((t_i, t_{-i}) \mid t_i)$. Załóżmy, że rozważamy grę z niepełną informacją dwóch graczy, w której każdy z graczy ma 2 typy. Czy znając przekonania graczy o rozkładzie typu przeciwnika $p_1(\cdot \mid t_1)$ oraz $p_2(\cdot \mid t_2)$ jesteśmy w stanie wyznaczyć rozkład a priori p? W jaki sposób? Czy zawsze będzie to możliwe? Jeśli nie – podaj przykład, dla którego taki rozkład nie istnieje.