

Elementy teorii gier,
semestr zimowy 2022/2023
VII lista zadań

1. Pokaż, że grami właściwymi są:
 - (a) Dowolna poprawnie zdefiniowana gra głosowania (niekoniecznie z wagami, tzn. gra głosowania, w której dla żadnej koalicji wygrywającej jej dopełnienie nie jest koalicją wygrywającą oraz dla każdej koalicji wygrywającej dowolny jej nadzbiór jest koalicją wygrywającą).
 - (b) Gra kooperacyjna zdefiniowana na bazie (skończonej) gry macierzowej w sposób przedstawiony na wykładzie, przy czym w grach pomiędzy koalicjami graczy użytych do zdefiniowania gry kooperacyjnej gracze mogą używać mieszanych strategii bezpieczeństwa.
2. Zastosuj modyfikację opisaną w podpunkcie (b) poprzedniego zadania do gry macierzowej z przykładu podanego na wykładzie.
 - (a) Oblicz jej funkcję charakterystyczną.
 - (b) Znajdź jej rdzeń.
 - (c) Sprawdź, czy jest ona wypukła.
 - (d) Oblicz wartość Shapleya dla tej gry.
3. Pokaż, że w dowolnej grze głosowania z wagami co najmniej 3 graczy zachodzi jedna z dwóch możliwości:
 - Istnieje gracz, który znajduje się w każdej koalicji wygrywającej (oznaczmy go literką a). Wtedy rdzeń tej gry jest jednoelementowy, a jego jedyny element jest postaci: $x_a = 1, x_i = 0$ dla $i \neq a$.
 - Taki gracz nie istnieje. Wtedy rdzeń jest pusty.
4. Niech gra v będzie określona następująco: $v(\emptyset) = 0, v(\{a\}) = v(\{b\}) = 1, v(\{c\}) = v(\{a, b\}) = 2, v(\{a, c\}) = v(\{b, c\}) = 4, v(\{a, b, c\}) = 5$.
 - (a) Znajdź rdzeń w tej grze.
 - (b) Oblicz wartość Shapleya dla tej gry.
 - (c) Czy wartość Shapleya należy do rdzenia?
5. Niech v będzie grą głosowania 4 graczy z wagami $w_1 = 6, w_2 = 1, w_3 = 2, w_4 = 5$. Oblicz wartość Shapleya dla tej gry.
6. W pewnej organizacji międzynarodowej decyzje są podejmowane podwójną większością (tzn. do podjęcia decyzji potrzebna jest zgoda większości państw reprezentujących jednocześnie większość ludności). Oblicz dla tej gry wartość Shapleya przy założeniu, że do tej organizacji należy pięć państw: A z 80 mln. ludności, B z 50 mln., C z 30 mln., D z 20 mln. i E z 10 mln.
7. Na pewnym osiedlu domków jednorodzinnych ma zostać podjęta decyzja odnośnie infrastruktury dla psów. W związku z tym ustalono następujące reguły głosowania: żeby podjąć decyzję, głosować za nią musi większość rodzin oraz większość rodzin, w których znajduje się pies, ewentualnie większość rodzin z psami i połowa wszystkich rodzin pod warunkiem, że wśród głosujących „za” jest szef Rady Osiedla. Na osiedlu mieszka 6 rodzin: Kowalscy, Borowscy i Nowakowie mają po psie, natomiast Górscy, Stefaniakowie i Zielińscy psów nie posiadają. Na czele Rady Osiedla stoi Pan Górski.

Opisz powyższą grę przy pomocy funkcji charakterystycznej, a następnie znajdź dla niej wartość Shapleya.
8. Chrześcijańska Unia Jedności jest kanapową partią federacyjną. W jej skład wchodzi Chrześcijańscy Demokraci (10 członków), Chrześcijańscy Monarchiści (7 członków), Chrześcijańscy Komuniści (4 członków) i Chrześcijańscy Anarchiści (2 członków), a także, nie należący do żadnej z frakcji, Honorowy Prezes – założyciel ugrupowania. Decyzje w partii podejmowane są przez pięcioosobowy zarząd, składający się z przedstawicieli wszystkich 4 frakcji oraz Honorowego Prezesa, w następujący sposób: żeby decyzja była podjęta, musi popierać ją co najmniej połowa frakcji i Honorowy Prezes lub, jeśli Prezes jest przeciw – ponad połowa członków (zakładamy, że członkowie dowolnej pojedynczej frakcji są zawsze jednomyślni, a zatem graczy jest pięciu – 4 frakcje oraz Honorowy Prezes).

Opisz tę grę przy pomocy funkcji charakterystycznej, a następnie znajdź dla niej wartość Shapleya.

9. W skład partii Kanapa Polska wchodzi 5 członków: Prezes, Kot Prezesa oraz 3 szeregowych członków. Żeby podjąć jakąkolwiek decyzję w imieniu partii, popierana musi ona być przez Prezesa i Jego Kota, ewentualnie przez większość z 5 członków KP, o ile jest wśród nich Prezes lub przez wszystkich 4 z wyjątkiem Prezesa. Opisz tę grę przy pomocy funkcji charakterystycznej, a następnie znajdź dla niej wartość Shapleya.
10. Niech m będzie liczbą naturalną podzieloną przez 6. Dla $n = \frac{m}{6} + 5$ -osobowej gry głosowania z wagami $w_1 = \frac{m}{2}$, $w_2 = \frac{m}{3}$, $w_3 = \dots = w_n = 1$ oblicz wartość Shapleya. Jakie są granice wartości Shapleya 1. i 2. gracza przy m dążącym do nieskończoności?