Izoperymetria gaussowska

Tomasz Żak

Politechnika Wrocławska

6 lipca 2010

Klasyczny problem izoperymetryczny

Spośród wszystkich ograniczonych płaskich figur o zadanym obwodzie znaleźć tę, która ma **największe** *pole.*

Klasyczny problem izoperymetryczny

Spośród wszystkich ograniczonych płaskich figur o zadanym obwodzie znaleźć tę, która ma **największe** *pole.*

Figura (nietrywialna) o najmniejszym polu nie istnieje, wystarczy rozważyć prostokąty o zadanym obwodzie.

Klasyczny problem izoperymetryczny

Spośród wszystkich ograniczonych płaskich figur o zadanym obwodzie znaleźć tę, która ma **największe** *pole.*

Figura (nietrywialna) o najmniejszym polu nie istnieje, wystarczy rozważyć prostokąty o zadanym obwodzie.

Izos = równy, taki sam　　　perimetros = obwód

Co o izoperymetrii wiedzieli starożytni?

Mickiewicz w *Panu Tadeuszu* wspomina o historii podanej przez Wergiliusza:

Gdy księżniczka Dydona przybyła statkiem z gromadą poddanych do pewnego lądu i poprosiła o darowanie jej pewnego obszaru ziemi, dano jej wołową skórę i powiedziano, że dostanie tyle ziemi, ile przykryje ta skóra.

Mickiewicz w *Panu Tadeuszu* wspomina o historii podanej przez Wergiliusza:

Gdy księżniczka Dydona przybyła statkiem z gromadą poddanych do pewnego lądu i poprosiła o darowanie jej pewnego obszaru ziemi, dano jej wołową skórę i powiedziano, że dostanie tyle ziemi, ile przykryje ta skóra.

Co zrobiła Dydona? Zapewne za sprawą mądrych doradców pocięła skórę, splotła z nich sznurek i zatoczyła nim **koło**.

Jak jest w trzech wymiarach?

Problem izoperymetryczny w przestrzeni:

Spośród wszystkich brył o zadanym polu powierzchni znaleźć tę, która ma największą objętość

Problem izoperymetryczny w przestrzeni:

Spośród wszystkich brył o zadanym polu powierzchni znaleźć tę, która ma największą objętość

rozwiązujemy podświadomie, gdy jest nam zimno.

Jak jest w trzech wymiarach?

Formalnie rozwiązujemy wtedy problem nieco inny (problem dualny):

Kulimy się, bo, nie mogąc zmniejszyć objętości, chcemy mieć jak najmniejszą powierzchnię (bo przez nią tracimy ciepło).

Zauważmy, że wyrażenie **kulić się** daje odpowiedź na pytanie, zawarte w problemie izoperymetrycznym.

Problem dualny

Problem izoperymetryczny:
Spośród wszystkich figur płaskich o zadanym obwodzie znaleźć tę, która ma największe pole.

Problem dualny:
Spośród wszystkich figur płaskich o zadanym polu znaleźć tę, która ma najmniejszy obwód.

Czy są równoważne?

Równoważność obu problemów

Oba problemy są równoważne, gdyż każdy z nich jest równoważny poniższej nierówności:

Niech L oznacza obwód, P zaś pole figury płaskiej. Wtedy

$$\frac{4\pi P}{L^2} \leqslant 1$$

czyli

$$4\pi P \leqslant L^2.$$

Związek pola i obwodu

W przypadku figur „regularnych”, np. wielokątów czy koła, obwód można obliczyć, znając pola „ε-otoczek”.
Niech K będzie taką figurą, określamy ε-otoczkę zbioru K jako $K_\varepsilon = \{x : d(x, K) < \varepsilon\}$. Niech λ oznacza płaską miarę Lebesgue'a. Wówczas

$$L = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\lambda(K_\varepsilon) - \lambda(K)}{\varepsilon}.$$

Na przykład dla koła na płaszczyźnie mamy $\frac{d}{dr}(\pi r^2) = 2\pi r$, a dla kuli w przestrzeni $\frac{d}{dr}(\frac{4}{3}\pi r^3) = 4\pi r^2$.

Nierówność Bruna-Minkowskiego

Niech A, B będą niepustymi zwartymi podzbiorami $\mathbb{R}^n$. Określmy $A + B = \{x + y \,:\, x \in A,\, y \in B\}$. Wówczas

$$(\lambda(A+B))^{1/n} \geqslant (\lambda(A))^{1/n} + (\lambda(B))^{1/n},$$

przy czym równość zachodzi tylko, gdy A i B są jednokładne.

Nierówność Bruna-Minkowskiego

Niech A, B będą niepustymi zwartymi podzbiorami $\mathbb{R}^n$. Określmy $A+B=\{x+y\ :\ x\in A,\ y\in B\}$. Wówczas

$$(\lambda(A+B))^{1/n}\geqslant(\lambda(A))^{1/n}+(\lambda(B))^{1/n},$$

przy czym równość zachodzi tylko, gdy A i B są jednokładne.

Dowód polega na wykazaniu, że funkcja $A\longrightarrow(\lambda(A))^{1/n}$ jest wklęsła, tzn. dla $0<t<1$

$$(\lambda(tA+(1-t)B))^{1/n}\geqslant t(\lambda(A))^{1/n}+(1-t)(\lambda(B))^{1/n}.$$

Nierówność Bruna-Minkowskiego implikuje nierówność izoperymetryczną

Niech $B = B(\varepsilon)$ będzie kulą o promieniu ε. Wtedy $A + B(\varepsilon) = A_\varepsilon$ i na mocy nierówności Bruna-Minkowskiego mamy

$$L = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\lambda(A_\varepsilon) - \lambda(A)}{\varepsilon} \geqslant \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{(\lambda(A)^{1/n} + \lambda(B(\varepsilon))^{1/n})^n - \lambda(A)}{\varepsilon} =$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{(\lambda(A)^{1/n} + C_n\varepsilon)^n - \lambda(A)}{\varepsilon} =$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\lambda(A) + nC_n\varepsilon\lambda(A)^{(n-1)/n} + o(\varepsilon) - \lambda(A)}{\varepsilon} = nC_n\lambda(A)^{(n-1)/n}.$$

Stąd dla $n = 2$, po oznaczeniu $P = \lambda(A)$, mamy

$$L \geqslant 2C_2\sqrt{P}, \qquad \text{czyli} \qquad L^2 \geqslant 4\pi P.$$

Jak to jest na sferze?

Niech C będzie krzywą zamkniętą, bez samoprzecięć, leżącą na sferze o promieniu jeden w $\mathbb{R}^3$. Oznaczmy przez P pole figury ograniczonej krzywą C, a przez L długość tej krzywej. Paul Lévy wykazał, że wówczas

$$L^2 \geqslant P(4\pi - P).$$

W szczególności, nie jest ważne, która z dwóch części sfery jest „figurą ograniczoną konturem C".

Miara gaussowska

W rachunku prawdopodobieństwa jednym z najważniejszych rozkładów w $\mathbb{R}^n$ jest rozkład normalny. Standardowy rozkład normalny γ_n ma gęstość

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} e^{-\frac{1}{2}(x_1^2 + \dots + x_n^2)}.$$

Nasuwa się naturalne pytanie: jakie borelowskie podzbiory $\mathbb{R}^n$ mają własności ekstremalne w sensie izoperymetrii?

Miara gaussowska

Niech A będzie dowolnym zbiorem borelowskim w $\mathbb{R}^n$, A_ε jego otoczką. Określmy „gaussowską miarę brzegu A” wzorem

$$L(A) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\gamma_n(A_\varepsilon) - \gamma_n(A)}{\varepsilon}.$$

Rozważmy rodzinę wszystkich borelowskich podzbiorów A o ustalonej mierze, np. $\gamma_n(A) = \alpha$. Dla jakiego zbioru z tej rodziny $L(A)$ jest najmniejsze?

Miara Lebesgue'a a miara probabilistyczna

Ponieważ miara gaussowska żadnego zbioru borelowskiego nie przekracza jedynki, więc ma sens rozważanie zbiorów nieograniczonych.

I rzeczywiście, w roku 1974 V.N. Sudakow z B.S. Cirelsonem i niezależnie od nich C. Borell wykazali, że

Spośród wszystkich wypukłych borelowskich podzbiorów $\mathbb{R}^n$ *o ustalonej mierze* $0 < \alpha < 1$ *najmniejszą „gaussowską miarę brzegu" ma półprzestrzeń, tzn. zbiór* $\{x \in \mathbb{R}^n : x_n > a\}$.

Dowód

Oba dowody polegały na wykorzystaniu pewnych nierówności.

Na przykład Sudakow i Cirelson wykazali, że jeśli C jest zbiorem wypukłym, a H półprzestrzenią w $\mathbb{R}^n$, dla której $\gamma_n(C) = \gamma_n(H)$, to dla $\lambda > 1$ zachodzi nierówność

$$\gamma_n(\lambda C) \geqslant \gamma_n(\lambda H).$$

Podobną nierówność udowodnił i zastosował w swoim dowodzie Borell.

Powyższa nierówność jest równoważna następującej: niech $\Phi(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dx$. Wtedy dla $\lambda > 1$ zachodzi nierówność

$$\Phi^{-1}(\gamma_n(\lambda C)) \geqslant \lambda \Phi^{-1}(\gamma_n(C)).$$

A w klasie zbiorów symetrycznych?

Ponieważ odpowiedź jest tak inna niż dla miary Lebesgue'a — w szczególności zbiór nie jest symetryczny, pojawia się pytanie:

Jaki zbiór ma własność „minimalności miary brzegu" w klasie zbiorów wypukłych symetrycznych, tzn. $A = -A$?

Częściowa odpowiedź

S. Kwapień, J. Sawa (Studia Mathematica, 1993):

Na płaszczyźnie takim zbiorem jest pas $P = \{(x, y) \,:\, |x| < a\}$.

Przy dodatkowym technicznym założeniu o „symetrii A ze względu na γ”, twierdzenie zachodzi nawet w przestrzeniach Banacha.

W przypadku ogólnym dowód podali R. Latała i K. Oleszkiewicz (Annals of Probability, 1999)

Twierdzenie:
W klasie symetrycznych borelowskich zbiorów wypukłych $A \subset \mathbb{R}^n$ o zadanej mierze gaussowskiej $0 < \alpha < 1$ zachodzi nierówność: jeśli $\gamma_n(A) = \alpha = \gamma_n(P)$, to dla wszystkich $\lambda > 1$

$$\gamma_n(\lambda A) \geqslant \gamma_n(\lambda P).$$

Wniosek:

$$\lim_{\lambda \to 1+} \frac{\gamma(\lambda A) - \gamma(A)}{\lambda - 1} \geqslant \lim_{\lambda \to 1+} \frac{\gamma(\lambda P) - \gamma(P)}{\lambda - 1}.$$

Niech $\Phi(t)$ oznacza dystrybuantę jednowymiarowej zmiennej gaussowskiej: $\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-x^2/s} dx$.
Wówczas dla każdego $\lambda \in [0, 1]$ i dowolnych zbiorów borelowskich $A, B \subset \mathbb{R}^n$ zachodzi nierówność

$$\Phi^{-1}\Big(\gamma_n(\lambda A + (1-\lambda)B)\Big) \geqslant \lambda\Phi^{-1}\Big(\gamma_n(A)\Big) + (1-\lambda)\Phi^{-1}\Big(\gamma_n(B)\Big).$$

Uwagi:

1. Ehrhard dowiódł tego w roku 1983 dla zbiorów wypukłych, potem w 1996 Latała przy założeniu, że jeden z nich jest wypukły, w końcu Borell w 2003 dla dowolnych borelowskich.

2. Nierówność ta mówi, że odpowiednią „skalą” w przypadku miary gaussowskiej jest Φ^{-1}; dla miary Lebesgue'a był to n-ty pierwiastek $\lambda(A)^{1/n}$.

Dowód twierdzenia dla zbiorów o małej średnicy

Przypomnijmy:

W klasie symetrycznych zbiorów borelowskich $A \subset \mathbb{R}^n$ o zadanej mierze gaussowskiej $0 < \alpha < 1$ zachodzi nierówność: jeśli $\gamma_n(A) = \alpha = \gamma_n(P)$, to dla wszystkich $\lambda > 1$

$$\gamma_n(\lambda A) \geqslant \gamma_n(\lambda P).$$

Dla $t > 0$ określmy $F_B(t) = \gamma_n(tB)$. Powyższe twierdzenie jest równoważne zdaniu:
Jeśli $\gamma_n(A) = \alpha = \gamma_n(P)$, to wykresy funkcji $F_A(t)$ oraz $F_P(t)$ przecinają się tylko w punkcie $t = 1$, przy czym $F_A'(1) > F_P'(1)$.

Dowód twierdzenia dla zbiorów o małej średnicy

Niech B będzie borelowskim zbiorem symetrycznym, a $g(x)$ gęstością miary gaussowskiej γ_n. Wtedy

$$F_B(t) = \int_{tB} g(x)\, dx = \left| x = t \cdot u,\ \ dx = t^n \cdot du \right| = t^n \int_B g(tu)\, du,$$

skąd

$$\left. \frac{dF_B(t)}{dt} \right|_{t=1} = \int_B \frac{d}{dt} g(tu)\, du \cdot t^n + n t^{n-1} \int_B g(tu)\, du \right|_{t=1} =$$

Dowód twierdzenia dla zbiorów o małej średnicy

$$= n \int_B g(u)\, du + \int_B \Big(-\sum_{i=1}^{n} t u_i^2\Big) e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} t u_i^2}\, du \Big|_{t=1} =$$

$$n F_B(1) - \int_B |u|^2 e^{-\frac{1}{2}|u|^2}\, du,$$

zatem twierdzenie zachodzi dla zbioru A i pasa P, gdy

$$\int_P |u|^2 e^{-\frac{1}{2}|u|^2}\, du \geqslant \int_A |u|^2 e^{-\frac{1}{2}|u|^2}\, du.$$

Dowód twierdzenia dla zbiorów o małej średnicy

$$\int_P |u|^2 e^{-\frac{1}{2}|u|^2}\, du \geqslant \int_A |u|^2 e^{-\frac{1}{2}|u|^2}\, du.$$

Dla zbiorów symetrycznych A o średnicy mniejszej niż $2\sqrt{n-1}$ (czyli zawartych w kuli o $B(0, \sqrt{n-1})$) mamy

$$\int_A |u|^2 e^{-\frac{1}{2}|u|^2}\, du \leqslant (n-1)\gamma(A),$$

natomiast

$$\int_P |u|^2 e^{-\frac{1}{2}|u|^2}\, du \geqslant \sum_{i=2}^{n-1} \int_P u_i^2 e^{-\frac{1}{2}|u|^2}\, du \geqslant (n-1)\gamma(P),$$

więc jeśli $\operatorname{diam}(A) < 2\sqrt{n-1}$, to powyższa nierówność jest spełniona, a zatem twierdzenie zachodzi dla podzbiorów $\mathbb{R}^n$ zawartych w kuli o promieniu $\sqrt{n-1}$.