Analiza matematyczna 2A (USPO)

Opracowanie: dr Marian Gewert, dr Zbigniew Skoczylas

Ćwiczenia 1

1.1. Korzystając z definicji zbadać zbieżność całek niewłaściwych I rodzaju:

(a) $\int\limits_2^\infty \frac{dx}{x^2-x}$; (b) $\int\limits_4^\infty \frac{\sqrt{x}\,dx}{x+1}$; (c) $\int\limits_{2\pi}^\infty x\cos x\,dx$;

(d) $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{\sqrt{e^{-x}+1}}$; (e) $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+6x+25}$; (f) $\int\limits_{-\infty}^\infty xe^{2x}\,dx$.

1.2. Korzystając z kryterium porównawczego zbadać zbieżność całek niewłaściwych I rodzaju:

(a) $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x\left(\sqrt{x}+1\right)}$; (b) $\int\limits_4^\infty \frac{dx}{\left(\sqrt{x}+3\right)^2}$; (c) $\int\limits_1^\infty \frac{x(x+1)\,dx}{x^4+x+1}$;

(d) $\int\limits_0^\infty \frac{(2^x+1)\,dx}{3^x+1}$; (e) $\int\limits_\pi^\infty \frac{(x+\sin x)\,dx}{x^3}$; (f) $\int\limits_4^\infty \frac{(3+\cos x)\,dx}{\sqrt{x}+3}$.

1.3. Korzystając z kryterium ilorazowego zbadać zbieżność całek niewłaściwych I rodzaju:

(a) $\int\limits_1^\infty \frac{\left(\sqrt{x}+1\right)\,dx}{x(x+1)}$; (b) $\int\limits_5^\infty \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^5-3}}$; (c) $\int\limits_2^\infty \left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)\,dx$; (d) $\int\limits_1^\infty \sin^2\frac{1}{x}\,dx$; (e) $\int\limits_1^\infty \frac{x^2\,dx}{x^3-\sin x}$.

1.4. (a) Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywą $y=\frac{1}{x^2+9}$ oraz osią Ox.

(b) Obliczyć objętość bryły powstałej z obrotu wokół osi Ox obszaru

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0\leqslant x,\ 0\leqslant y\leqslant e^{-x}\right\}.$$

(c) Uzasadnić, że pole powierzchni powstałej z obrotu wykresu funkcji $y=\frac{1}{x\sqrt{x}}$ $(x\geqslant 1)$ wokół osi Ox ma skończoną wartość.

Ćwiczenia 2

2.1. Znaleźć sumy częściowe podanych szeregów i następnie zbadać ich zbieżność:

(a) $\sum\limits_{n=0}^\infty \left(\frac{5}{6}\right)^n$; (b) $\sum\limits_{n=2}^\infty \frac{1}{n^2+3n+2}$; (c) $\sum\limits_{n=2}^\infty \frac{n-1}{n!}$; (d) $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$.

2.2. Korzystając z kryterium całkowego zbadać zbieżność szeregów:

(a) $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2+9}$; (b) $\sum\limits_{n=2}^\infty \frac{n-1}{n^2+n}$; (c) $\sum\limits_{n=2}^\infty \frac{\ln n}{n^2}$; (d) $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$; (e) $\sum\limits_{n=0}^\infty \frac{e^n}{e^{2n}+1}$.

2.3. Korzystając z kryterium porównawczego zbadać zbieżność szeregów:

(a) $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{3n+1}{n^3+2}$; (b) $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{\sqrt{n^2+1}}{n^2+2}$; (c) $\sum\limits_{n=1}^\infty \sin\frac{\pi}{2^n}$; (d) $\sum\limits_{n=0}^\infty \frac{2^n+e^n}{e^n+4^n}$; (e) $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{3^n+n}{n3^n+2^n}$.

2.4. Korzystając z kryterium ilorazowego zbadać zbieżność szeregów:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2}{\sqrt{2n^6-1}}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^4+1}$; (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n-1}{3^n-1}$;

(d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}4^n\left(1+3^{-n}\right)$; (e) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{n^2}}{\sin\frac{\pi}{n}}$; (f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!+1}{(n+2)!}$.

2.5. Korzystając z kryterium d'Alemberta zbadać zbieżność szeregów:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2024^n}{(2n)!}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n+1}{n^4+1}$; (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$; (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{\pi^n n!}$; (e*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

2.6. Korzystając z kryterium Cauchy'ego zbadać zbieżność szeregów:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)^{2n}}{(3n^2+1)^n}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{3^n+5^n}$; (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n^{n^2}}{(n+1)^{n^2}}$; (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{n}{n+1}\right)^n$.

Ćwiczenia 3

3.1. Wykazać zbieżność odpowiedniego szeregu i następnie na podstawie warunku koniecznego zbieżności szeregów uzasadnić podane równości:

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^{2024}}{3^n}=0$; (b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}=0$; (c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{n!}=\infty$; (d*) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(3n)!(4n)!}{(5n)!(2n)!}=0$.

3.2. Korzystając z twierdzenia Leibniza uzasadnić zbieżność szeregów:

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$; (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{3^n+4^n}$; (c) $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty}\sin\frac{(-1)^n}{n}$; (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3^n}{n!}$.

3.3. Zbadać zbieżność oraz zbieżność bezwzględną szeregów:

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n+1}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n^2+2}$; (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-2n}{3n+5}\right)^n$; (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\sqrt[n]{e}-1\right)$; (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{2^n}$.

3.4. Wyznaczyć przedziały zbieżności szeregów potęgowych:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{ne^n}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(4x-12)^n$; (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n!}$; (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x+6)^n}{3^n-2^n}$; (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(x+1)^{2n}}{2^n+3}$.

Ćwiczenia 4

4.1. Znaleźć szeregi Maclaurina podanych funkcji i określić przedziały ich zbieżności:

(a) $\dfrac{5}{1-2x}$; (b) $\sin\dfrac{x}{2}$; (c) x^2e^{-x}; (d) $\dfrac{x^3}{16+x^2}$; (e) $\cosh x$; (f) $\sin^2 x$.

4.2. Korzystając z rozwinięć Maclaurina funkcji elementarnych obliczyć:

(a) $f^{(50)}(0)$, $f(x)=x^2\cos x$; (b) $f^{(20)}(0)$, $f(x)=xe^{-x}$;

(c) $f^{(11)}(0)$, $f(x)=\dfrac{x^3}{1+x^2}$; (d) $f^{(10)}(0)$, $f(x)=x\sin^2\dfrac{x}{2}$.

4.3. Korzystając z twierdzenia o różniczkowaniu lub całkowaniu szeregów potęgowych wyznaczyć szeregi Maclaurina funkcji:

(a) $f(x)=\dfrac{1}{(1+x)^2}$; (b) $f(x)=xe^{-x^2}$; (c) $f(x)=\ln\left(1+x^2\right)$; (d) $f(x)=\operatorname{arc\,tg} x$.

4.4. Wykorzystując twierdzenia o różniczkowaniu lub całkowaniu szeregów potęgowych pokazać, że dla każdego $x \in (-1, 1)$ prawdziwe są równości:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n = \dfrac{x}{(1-x)^2}$; (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n = \dfrac{2x}{(1-x)^3}$; (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!} = -\ln(1-x)$.

4.5. Obliczyć sumy szeregów liczbowych:

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(n+1)3^n}$; (b) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{2n-1}{2^n}$; (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n(n+1)}{5^n}$; (d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{(n+1)4^n}$.

Wsk. Wykorzystać równości z poprzedniego zadania.

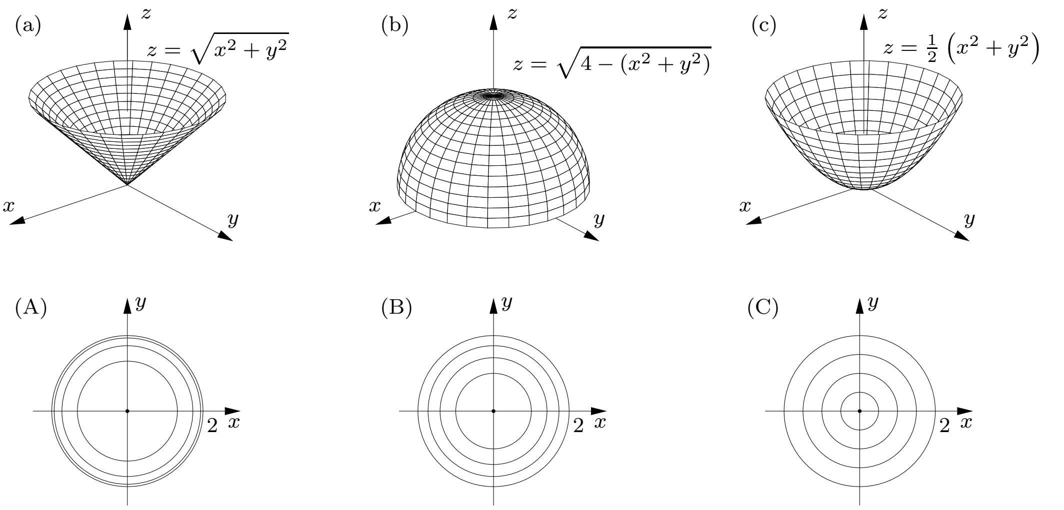
Ćwiczenia 5

5.1. Wyznaczyć i narysować dziedziny naturalne funkcji:

(a) $f(x,y) = \ln(y - \sin x)$; (b) $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{y-2}{x+1}}$; (c) $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{\sqrt{x^2 - y}}$;

(d) $f(x,y) = \ln \dfrac{x^2 + y^2 - 9}{16 - x^2 - y^2}$; (e) $g(x,y,z) = \sqrt{x} + \sqrt{2-z}$; (f) $g(x,y,z) = \arccos\left(x^2 + y^2 + z^2 - 9\right)$.

5.2. Wykresy (a), (b), (c) połączyć z odpowiadającymi im poziomicami (A), (B), (C) wykonanymi dla $h = 2, \frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2}, 0$:



5.3. Naszkicować wykresy funkcji:

(a) $f(x,y) = 1 - 2\sqrt{x^2 + y^2}$; (b) $f(x,y) = \sqrt{3 - 2x - x^2 - y^2}$; (c) $f(x,y) = x^2 + 2x + y^2 - 6y + 3$;

(d) $f(x,y) = \cos x$; (e) $f(x,y) = 1 - y^2$; (f*) $f(x,y) = \sqrt{y^2 - x^2}$.

5.4*. Obliczyć granice:

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin\left(x^4 - y^4\right)}{x^2 + y^2}$; (b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1 - \cos\left(x^2 + y^2\right)}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$;

(c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^2}$; (d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x^2 \cos \dfrac{1}{x^4 + y^4}$.

Ćwiczenia 6

6.1. Korzystając z definicji obliczyć pochodne cząstkowe pierwszego rzędu f'_x, f'_y funkcji f we wskazanych punktach:

(a) $f(x,y)=\dfrac{x^2}{y}$, $\quad(0,1)$; (b) $f(x,y)=\sqrt{x^6+y^4}$, $\quad(0,0)$.

6.2. Obliczyć pochodne cząstkowe pierwszego rzędu funkcji:

(a) $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^3}{xy^2}$; (b) $f(x,y)=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1-xy}{x+y}$; (c) $f(x,y)=e^{\cos\frac{x}{y}}$;

(d) $f(x,y)=y\sqrt{x^2+y^2}$; (e) $f(x,y)=\ln\left(\sqrt{x^2+y^2}-x\right)$; (f) $g(x,y,z)=z^2+\dfrac{xz}{y}+yz^3$;

(g) $g(x,y,z)=\dfrac{x}{y^2+z^2}$; (h) $g(x,y,z)=\cos\left(x\sin\left(y\cos z\right)\right)$; (i) $g(x,y,z)=\sqrt{x^2+\sqrt{y^2+\sqrt{z^2+1}}}$.

6.3. Sprawdzić, że funkcja f spełnia podane równanie:

(a) $f(x,y)=\ln\left(x^2+xy+y^2\right)$, $\quad xf'_x+yf'_y=2$; (b) $f(x,y)=\sqrt{x}\sin\dfrac{y}{x}$, $\quad xf'_x+yf'_y=\dfrac{f}{2}$.

6.4. Napisać równania płaszczyzn stycznych do wykresów podanych funkcji we wskazanych punktach wykresu:

(a) $z=x^2\sqrt{y+1}$, $\quad(1,3,z_0)$; (b) $z=e^{x+2y}$, $\quad(2,-1,z_0)$; (c) $z=\dfrac{\arcsin x}{\arccos y}$; $\quad\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2},z_0\right)$;

(d) $z=(2+x-3y)^4$, punkt wspólny wykresu i osi Oz;

(e) $z=e^{x+y}-e^{4-y}$, punkt wspólny wykresu i osi Ox.

6.5. (a) Na wykresie funkcji $z=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x}{y}$ wskazać punkty, w których płaszczyzna styczna jest równoległa do płaszczyzny $x+y-z=5$.

(b) Wyznaczyć równanie płaszczyzny stycznej do wykresu funkcji $z=x^2+y^2$, która jest prostopadła do prostej $x=y=\dfrac{z}{2}$.

Ćwiczenia 7

7.1. Wykorzystując różniczkę funkcji obliczyć przybliżone wartości wyrażeń:

(a) $(1.02)^3\cdot(0.997)^2$; (b) $\sqrt[3]{(3.03)^3+(4.04)^3+(5.05)^3}$; (c) $2.97\cdot e^{0.05}$; (d) $\dfrac{\cos 0.05}{1.96}$.

7.2. (a) Wysokość i promień podstawy walca zmierzono z dokładnością $\pm 1\,\mathrm{mm}$. Otrzymano $h=350\,\mathrm{mm}$ oraz $r=145\,\mathrm{mm}$. Z jaką w przybliżeniu dokładnością można obliczyć objętość V tego walca?

(b) Krawędzie prostopadłościanu mają długości $a=3\,\mathrm{m}$, $b=4\,\mathrm{m}$, $c=12\,\mathrm{m}$. Obliczyć w przybliżeniu, jak zmieni się długość przekątnej prostopadłościanu d, jeżeli długości wszystkich krawędzi zwiększymy o $2\,\mathrm{cm}$.

(c) Oszacować błąd względny δ_V objętości prostopadłościamu V, jeżeli pomiaru jego boków x,y,z dokonano z dokładnością odpowiednio δ_x, δ_y, δ_z.

7.3. Korzystając z definicji obliczyć pochodne kierunkowe podanych funkcji we wskazanych punktach i kierunkach:

(a) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$, $(x_0,y_0)=(0,0)$, $\boldsymbol{v}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2}\right)$;

(b) $f(x,y)=\sqrt[3]{xy}$, $(x_0,y_0)=(1,0)$, $\boldsymbol{v}=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

7.4. Obliczyć gradienty podanych funkcji we wskazanych punktach:

(a) $f(x,y)=x^3+xy^2+2, \quad (1,-2)$; (b) $f(x,y)=\ln(x+\ln y), \quad (e,1)$;
(c) $f(x,y)=(1+xy)^y, \quad (0,0)$; (d) $g(x,y,z)=x\sqrt{y}-e^z\ln y, \quad (0,1,0)$;
(e) $g(x,y,z)=\dfrac{x}{y+\sin z}, \quad (0,1,\pi)$; (f) $g(x,y,z)=\sqrt{z+\sqrt{y+\sqrt{x}}}, \quad (1,1,1)$.

7.5. Obliczyć pochodne kierunkowe podanych funkcji we wskazanych punktach i kierunkach:
(a) $f(x,y)=x^2=y^2$, $(x_0,y_0)=(-3,4)$, $\boldsymbol{v}=\left(\dfrac{12}{13},\dfrac{5}{13}\right)$;
(b) $f(x,y)=x-\dfrac{y}{x^2}+y$, $(x_0,y_0)=(1,1)$, $\boldsymbol{v}=\left(\dfrac{3}{5},-\dfrac{4}{5}\right)$;
(c) $g(x,y,z)=e^{x^2y-z}$, $(x_0,y_0,z_0)=(-1,1,,-1)$, $\boldsymbol{v}=\left(\dfrac{2}{3},-\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3}\right)$.

7.6. (a) Obliczyć pochodną kierunkową funkcji $f(x,y)=y-x^2+2\ln(xy)$ w punkcie $(-1/2,-1)$ w kierunku wersora $\boldsymbol{v}$ tworzącego kąt α z dodatnią częścią osi Ox. Dla jakiego kąta α pochodna ta ma wartość 0, a dla jakiego przyjmuje wartość największą?
(b) Wyznaczyć wersory $\boldsymbol{v}$, w kierunku których funkcja $f(x,y)=\sqrt{e^x}\left(x+y^2\right)$ w punkcie $(0,2)$ ma pochodną kierunkową równą 0.

Ćwiczenia 8

8.1. Obliczyć wszystkie pochodne cząskowe rzędu drugiego funkcji:
(a) $f(x,y)=\cos\left(x^2+y^2\right)$; (b) $f(x,y)=ye^{xy}$; (c) $f(x,y)=x^2+\dfrac{y^3}{x}$;
(d) $f(x,y)=y\ln\dfrac{x}{y}$; (e) $g(x,y,z)=y\left(1+x^2+z^2\right)$; (f) $g(x,y,z)=\ln\left(x+y^2+z^3+1\right)$
Zauważyć, że odpowiednie pochodne cząskowe mieszane są równe.

8.2. Sprawdzić, że podane funkcje spełniają warunek (równanie Laplace'a) $f''_{xx}+f''_{yy}=0$:
(a) $f(x,y)=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x}{y}$; (b) $f(x,y)=\ln\left(x^2+y^2\right)$; (c) $f(x,y)=\cos x\cosh y$.

8.3. Znaleźć ekstrema lokalne funkcji:
(a) $f(x,y)=x^3+3xy^2-51x-24y$; (b) $f(x,y)=xe^{-y}+\dfrac{1}{x}+e^y$;
(c) $f(x,y)=xy^2(12-x-y)$ $(x,y>0)$; (d) $f(x,y)=y\sqrt{x}-y^2-x+6y$;
(e) $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$; (f) $f(x,y)=\dfrac{8}{x}+\dfrac{x}{y}+y$ $(x,y>0)$;
(g) $f(x,y)=xy+\ln y+x^2$; (h) $f(x,y)=e^{x-2y}+e^{y-x}+e^{6+y}$;
(i) $f(x,y)=e^{x^2-y}(5-2x+y)$.

8.4. Wyznaczyć ekstrema podanych funkcji, których argumenty spełniają wskazane warunki:
(a) $f(x,y)=x^2+y^2, \quad 3x+2y=6$; (b) $f(x,y)=x^2+y^2-8x+10, \quad x-y^2+1=0$;
(c) $f(x,y)=x^2y+\ln x, \quad 8x+3y=0$; (d) $f(x,y)=2x+3y, \quad x^2+y^2=1$.

Ćwiczenia 9

9.1. Znaleźć najmniejsze i największe wartości podanych funkcji na wskazanych zbiorach lub w ich dziedzinach naturalnych:

(a) $f(x,y) = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$, $D = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leqslant y \leqslant 4\Big\}$;

(b) $f(x,y) = \sqrt{y - x^2} + \sqrt{x - y^2}$; (c) $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{4 - (x^2 + y^2)}$;

(d) $f(x,y) = x^2 - y^2$, D -– trójkąt o wierzchołkach $(0,1)$, $(0,2)$, $(1,2)$;

(e) $f(x,y) = x^4 + y^4$, $D = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 9\Big\}$;

(f*) $f(x,y) = (x+y)e^{-x-2y}$, $D = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\Big\}$.

9.2. W trójkącie o wierzchołkach $A = (-1,5)$, $B = (1,4)$, $C = (2,-3)$ znaleźć punkt $M = (x_0, y_0)$, dla którego suma kwadratów jego odległości od wierzchołków jest najmniejsza.

9.3. Jakie powinny być długość a, szerokość b i wysokość h prostopadłościennej otwartej wanny o pojemności V, aby ilość blachy zużytej do jej zrobienia była najmniejsza?

9.4. Znaleźć odległość między prostymi skośnymi:

$$k : \begin{cases} x + y - 1 = 0, \\ z + 1 = 0, \end{cases} \qquad l : \begin{cases} x - y + 3 = 0, \\ z - 2 = 0. \end{cases}$$

9.5. Prostopadłościenny magazyn ma mieć objętość $V = 216\,\mathrm{m}^3$. Do budowy ścian magazynu używane są płyty w cenie $30\,\text{zł}/\mathrm{m}^2$, do budowy podłogi w cenie $40\,\text{zł}/\mathrm{m}^2$, a sufitu w cenie $20\,\text{zł}/\mathrm{m}^2$. Znaleźć długość a, szerokość b i wysokość c magazynu, którego koszt budowy będzie najmniejszy.

9.6. Firma produkuje drzwi wewnętrzne i zewnętrzne. Następnie sprzedaje je odpowiednio po 500 zł i 2000 zł za sztukę. Koszt wyprodukowania x sztuk drzwi wewnętrznych i y zewnetrznych wynosi $K(x,y) = x^2 - xy + y^2$ [zł]. Ile sztuk drzwi każdego rodzaju powinna wyprodukować firma, aby osiągnąć największy zysk?

9.7. Na paraboli $y = x^2/2$ wyznaczyć punkt, którego odległość od punktu $P = (4,1)$ jest najmniejsza.

Ćwiczenia 10

10.1. Obliczyć całki podwójne po wskazanych prostokątach:

(a) $\displaystyle\iint_R \Big(x + xy - x^2 - 2y\Big)\, dxdy$, $\quad R = [0,1] \times [0,1]$; (b) $\displaystyle\iint_R \frac{x\, dxdy}{y^2}$, $\quad R = [1,2] \times [2,4]$;

(c) $\displaystyle\iint_R \frac{dxdy}{(x+y+1)^3}$, $\quad R = [0,2] \times [0,1]$; (d) $\displaystyle\iint_R (x \sin(xy))\, dxdy$, $\quad R = [0,1] \times [\pi, 2\pi]$;

(e) $\displaystyle\iint_R e^{2x-y}\, dxdy$, $\quad R = [0,1] \times [-1,0]$; (f) $\displaystyle\iint_R \frac{(x+y)\, dxdy}{e^x}$, $\quad R = [0,1] \times [0,1]$.

10.2. Obliczyć całki iterowane:

(a) $\displaystyle\int_1^2 dx \int_x^{x^2} \frac{y}{x^2}\, dy$; (b) $\displaystyle\int_1^4 dx \int_x^{2x} x^2\sqrt{y - x}\, dy$; (c) $\displaystyle\int_{-2}^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \Big(x^3 + y^3\Big)\, dy$; (d) $\displaystyle\int_0^3 dy \int_0^y \sqrt{y^2 + 16}\, dx$.

Narysować obszary całkowania.

10.3. Narysować obszar całkowania, a następnie zmienić kolejność całkowania w całkach:

(a) $\displaystyle\int_{-1}^1 dx \int_{-1}^{|x|} f(x,y)\, dy$; (b) $\displaystyle\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{2-x^2}}^0 f(x,y)\, dy$; (c) $\displaystyle\int_0^4 dx \int_{\sqrt{4x-x^2}}^{2\sqrt{x}} f(x,y)\, dy$;

(d) $\displaystyle\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dy \int_{y^2-1}^{\frac{y^2}{2}} f(x,y)\, dx$; (e*) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dx \int_{\cos x}^{\sin x} f(x,y)\, dy$; (f) $\displaystyle\int_1^e dx \int_{\ln x}^1 f(x,y)\, dy$.

10.4. Obliczyć całki po obszarach normalnych ograniczonych wskazanymi krzywymi:

(a) $\iint\limits_D xy^2\,dxdy$, $\quad D: \; y = x, \quad y = 2 - x^2;$

(b) $\iint\limits_D x^2 y\,dxdy$, $\quad D: \; y = -2, \quad y = \dfrac{1}{x}, \quad y = -\sqrt{-x};$

(c) $\iint\limits_D e^{\frac{x}{y}}\,dxdy$, $\quad D: \; y = \sqrt{x}, \quad x = 0, \quad y = 1/2, \quad y = 1;$

(d) $\iint\limits_D \left(xy + 4x^2\right)\,dxdy$, $\quad D: \; y = x + 3, \quad y = x^2 + 3x + 3;$

(e) $\iint\limits_D x^2 e^{xy}\,dxdy$, $\quad D: \; y = x, \quad y = 1, \quad x = 0;$

(f) $\iint\limits_D \dfrac{x\,dxdy}{x^2 + y^2}$, $\quad D: \; x = 1, \quad x = 2, \quad y = x, \quad y = x\sqrt{3};$

(g) $\iint\limits_D e^{x^2}\,dxdy$, $\quad D: \; y = 0, \quad y = 2x, \quad x = \sqrt{\ln 3};$

(h) $\iint\limits_D (2x - 3y + 2)\,dxdy$, $\quad D: \; y = 0, \quad y = \pi, \quad x = -1, \quad x = \sin y.$

Ćwiczenia 11

11.1. Wprowadzając współrzędne biegunowe obliczyć podane całki podwójne po wskazanych obszarach:

(a) $\iint\limits_D xy\,dxdy$, $\quad D: \; x^2 + y^2 \leqslant 1, \quad \dfrac{x}{\sqrt{3}} \leqslant y \leqslant \sqrt{3}x;$

(b) $\iint\limits_D xy^2\,dxdy$, $\quad D: \; 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 2, \quad x \geqslant 0;$

(c) $\iint\limits_D y^2 e^{x^2+y^2}\,dxdy$, $\quad D: \; x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0, \quad x^2 + y^2 \leqslant 1;$

(d) $\iint\limits_D x^2\,dxdy$, $\quad D: \; x^2 + y^2 \leqslant 2y;$

(e) $\iint\limits_D \left(x^2 + y^2\right)\,dxdy$, $\quad D: \; y \geqslant 0, \quad y \leqslant x^2 + y^2 \leqslant x;$

(f) $\iint\limits_D y\,dxdy$, $\quad D: \; x^2 + y^2 \leqslant 2x \; (y \leqslant 0);$

(g) $\iint\limits_D \sin\left(x^2 + y^2\right)\,dxdy$, $\quad D: \; x^2 + y^2 \leqslant \pi^2;$

(h) $\iint\limits_D \ln\left(1 + x^2 + y^2\right)\,dxdy$, $\quad D: \; 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 9.$

Obszar D naszkicować we współrzędnych kartezjańskich.

11.2. Obliczyć pola obszarów ograniczonych krzywymi:

(a) $y^2 = 4x$, $x + y = 3$, $y = 0$ $(y \geqslant 0)$; (b) $x^2 + y^2 - 2y = 0$, $x^2 + y^2 - 4y = 0$;
(c) $x + y = 4$, $x + y = 8$, $x - 3y = 0$, $x - 3y = 5$; (d) $x^2 + y^2 = 2y$, $y = \sqrt{3}|x|$.

11.3. Obliczyć objętości brył ograniczonych powierzchniami:
(a) $z = \sqrt{25 - (x^2 + y^2)}$, $z = x^2 + y^2 - 13$; (b) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z = 1$ $(z \geqslant 1)$;
(c) $x^2 + y^2 - 2y = 0$, $z = x^2 + y^2$, $z = 0$; (d) $z = 5 - x^2 - y^2$, $z = 1, z = 4$;
(e*) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$, $z = xy$, $z = 0$; (f*) $2z = x^2 + y^2$, $y + z = 4$.

Ćwiczenia 12

12.1. Obliczyć pola płatów:
(a) $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 \leqslant 1$; (b) $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x^2 + y^2 - Rx \leqslant 0$, $z \geqslant 0$ $(R > 0)$;
(c) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $1 \leqslant z \leqslant 2$;
(d) część sfery $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ leżąca wewnątrz paraboloidy $z = \left(x^2 + y^2\right)/2$.

12.2. Znaleźć położenia środków masy obszarów jednorodnych:
(a) $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leqslant y \leqslant 9\right\}$; (b) $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant \pi, 0 \leqslant y \leqslant \sin^2 x\right\}$;
(c) $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant 1, |y| \leqslant e^2\right\}$;
(d) D – trójkąt równoramienny o podstawie a i wysokości h;
(e) D – trójkąt równoboczny o boku $2a$, do którego dołączono półkole o promieniu a;
(f) D – kwadrat o boku 1, z którego wycięto półkole o średnicy 1.

12.3. Obliczyć momenty bezwładności obszarów jednorodnych o masie M, względem wskazanych osi lub punktów:
(a) trójkąt równoboczny o boku a, podstawa;
(b) odcinek paraboli o szerokości a i wysokości h, oś symetrii;
(c) kwadrat o boku a, przekątna;
(d) ćwiartka koła o promieniu R, oś symetrii;
(e) koło o średnicy d, środek;
(f) elipsa o półosiach a, b, oś symetrii.

Ćwiczenia 13

13.1. (a) Z pewnej substancji radioaktywnej po upływie 4 lat zostało 20 gram, a po upływie dalszych 4 lat tylko 4 gramy. Wyznaczyć masę substancji w chwili początkowej.
(b) Polon-210 ma okres połowicznego zaniku równy 140 dni. Znaleźć masę tego pierwiastka po 100 dniach, jeżeli jego masa początkowa wynosiła 200 g.
(c) Okres połowicznego zaniku pewnego pierwiastka promieniotwórczego jest równy 100 lat. Ile procent masy początkowej tego pierwiastka pozostanie po: (i) 10, (ii) 50, (iii) 200 latach?

13.2. Scałkować równania różniczkowe o zmiennych rozdzielonych:
(a) $yy' + 4t = 0$; (b) $dy = 2ty^2 dt$; (c) $t\left(y^2 - 1\right) dt + y\left(t^2 - 1\right) dy = 0$;
(d) $2\sqrt{t}y' = \sqrt{1 - y^2}$; (e) $y' = 1 + t + y + ty$; (f) $y' + 4y = y\left(e^{-t} + 4\right)$.

13.3. Rozwiązać zagadnienia początkowe dla równań różniczkowych o rozdzielonych zmiennych:

(a) $y' \sin t = y \ln y, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e$; (b) $t\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-t^2}dy = 0, \quad y(0) = 1$;

(c) $t(y+1)y' = y, \quad y(e) = 1$; (d) $y \cos t\, dt - \left(1+y^2\right)\, dy = 0, \quad y(0) = 1$;

(e) $y' = y^2\left(1+t^2\right), \quad y(0) = -2$; (f) $e^y\left(y'-1\right) = 1, \quad y(0) = 0$.

13.4. Rozwiązać równania różniczkowe liniowe niejednorodne:

(a) $y' + y = \sin t$; (b) $y' + 2ty = e^{-t^2}$; (c) $ty' - 2y = t^3 \cos t$;

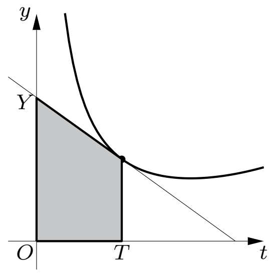
(d) $ty' - 2y = 4t^4$; (e) $ty + e^t - ty' = 0$; (f) $(2t+1)y' = 4t + 2y$.

13.5. Wyznaczyć rozwiązania zagadnień początkowych dla równań liniowych niejednorodnych:

(a) $y' - y = 1, \quad y(3) = 3$; (b) $y' = (y+1)\sin t, \quad y(t_0) = y_0$;

(c) $ty' + y = t + 1, \quad y(1) = 0$; (d) $y' \sin t \cos t = y + \sin^3 t, \quad y = \left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$.

13.6*. Znaleźć krzywe (leżące w pierwszej ćwiartce układu współrzednych), dla których trapez $OTSY$ (rys.) ograniczony osiami układu współrzędnych, styczną do krzywej i prostą prostopadłą do osi Ot przechodzącą przez punkt styczności ma pole stałe równe 3.

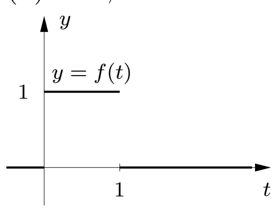


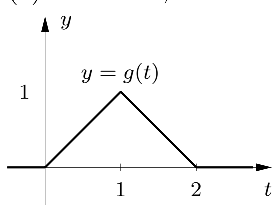
Ćwiczenia 14

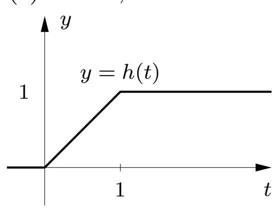
14.1. Korzystając z definicji obliczyć transformaty Laplace'a funkcji:

(a) $2t - 1$; (b) $\sin 2t$; (c) t^2;

(d) te^{-t}; (e) $e^{2t}\cos 2t$; (f) $\sinh t$;







14.2. Korzystając z transformat funkcji $t^n e^{\alpha t}$, $e^{\alpha t}\sin \beta t$, $e^{\alpha t}\cos\beta t$ oraz własności przekształcenia Laplace'a wyznaczyć transformaty funkcji:

(a) $2t - \cos 3t$; (b) $1 + t^2$; (c) $(t+2)e^{3t}$;

(d) $2\sin 2t + \cos t$; (e) $e^{-2t}(1 + \sin t)$; (f) $e^t(2\cos 3t - \sin 3t)$.

14.3. Wyznaczyć funkcje ciągłe, których transformaty Laplace'a mają postać:

(a) $\dfrac{1}{s+2}$; (b) $\dfrac{s}{s^2+4s+5}$; (c) $\dfrac{1}{s^2-4s+3}$;

(d) $\dfrac{s+2}{(s+1)(s-2)(s^2+4)}$; (e) $\dfrac{s^2+1}{s^2(s^2-1)^2}$; (f) $\dfrac{s+9}{s^2+6s+13}$.

14.4. Wykorzystując przekształcenie Laplace'a rozwiązać zagadnienia początkowe:

(a) $y' - y = 1$, $y(0) = 1$; (b) $y' - 2y = \sin t$, $y(0) = 0$;

(c) $y'' + y' = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$; (d) $y'' + 3y' = e^{-3t}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$;

(e) $y'' - 2y' + 2y = \sin t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$; (f) $y'' - 2y' + y = 1 + t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$;

(g) $y'' + 4y' + 4y = t^2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$; (h) $y'' + 4y' + 13y = te^{-t}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

Źródła zadań

[1] M.Gewert, Z.Skoczylas, Analiza matematyczna 2. Definicje, twierdzenia, wzory, Wrocław 2023.
[2] M.Gewert, Z.Skoczylas, Analiza matematyczna 2. Przykłady i zadania, Wrocław 2023.
[3] M.Gewert, Z.Skoczylas, Analiza matematyczna 2. Kolokwia i egzaminy, Wrocław 2023.
[4] M.Gewert, Z.Skoczylas, Równania różniczkowe zwyczajne. Teoria, przykłady, zadania, Wrocław 2016.
[5] Z.Skoczylas, Studencki konkurs matematyczny, Wrocław 2020.