Paradoksy nieskończoności

Wyobraźmy sobie salę, pełną ludzi siedzących na krzesłach. Jeżeli na każdym krześle siedzi jedna osoba, każde krzesło jest zajęte i nikt nie stoi, to oznacza to, że krzeseł i ludzi jest tyle samo. Zauważmy, że porównanie liczebności ludzi i krzeseł odbyło się tu bez pomocy liczb.

Ta prosta zasada pozwala porównywać liczebność zbiorów nieskończonych. Rozważmy dwie skale temperatur: Celsjusza od 0 do 100 stopni i Fahrenheita od 32 stopni do 212 stopni. Pomiędzy punktami obu skal istnieje idealna odpowiedniość: temperaturze Celsjusza odpowiada temperatura Fahrenheita i na odwrót. Wzór

$$F = \frac{9}{5}C + 32$$

pozwala przeliczać stopnie Celsjusza C na stopnie Fahrenheita F. Oznacza to, że odcinki $[0,\ 100]$ oraz $[32,\ 212]$ mają tyle samo punktów. A przecież wydawałoby się, że dłuższy odcinek ma ich więcej!

Formalnie pojęcie równoliczności określamy za pomocą funkcji. Powiemy, że zbiory A oraz B są **równoliczne**, gdy istnieje funkcja różnowartościowa

$$f : A \longrightarrow B$$

taka, że zbiorem wartości f jest cały zbiór B. Często takie funkcje opisywane są słownie. Tylko czasem da się je wyrazić za pomocą prostych wzorów.

To dość zadziwiające, że dłuższy odcinek ma tyle samo punktów co krótszy, ale z takimi paradoksami zderzamy się stale, gdy mowa o zbiorach nieskończonych. Oto kolejny przykład: zbiór liczb całkowitych jest równoliczny ze zbiorem liczb naturalnych. Niech n oznacza liczbę naturalną 0,1,2,..., a c całkowitą $0, \pm 1, \pm 2, ...$

$$c = (-1)^n \left[\frac{n+1}{2}\right], \quad \text{gdzie} \quad [x] \quad \text{oznacza część całkowią liczby } x.$$

Łatwo sprawdzić, ze kolejnym liczbom naturalnym 0, 1, 2, 3, 4, 5,... odpowiadają liczby całkowite $0,\ -1,\ 1,\ -2,\ 2, ...$

Zbiory równoliczne z N nazywamy **przeliczalnymi**. Intuicyjnie zbiór przeliczalny to taki, którego elementy można ponumerować liczbami naturalnymi.

Widzieliśmy już, że zbiorem przeliczalnym jest zbiór liczb całkowitych. Jeszcze dziwniejsze, że zbiorem przeliczalnym jest zbiór punktów kratowych o obu współrzędnych naturalnych. Poruszając się po nieskończonej łamanej, pokazanej na wykładzie, możemy kolejno wypisać wszystkie takie punkty.

Jeżeli w punkcie $A = (p, q)$ umieścimy ułamek $\frac{p}{q}$, to przekonamy się, że także zbiór liczb wymiernych dodatnich jest przeliczalny. Oczywiście po drodze musimy wykreślać niektóre ułamki, bo np. w punkcie $A = (2, 1)$ oraz w punkcie $B = (4, 2)$ pojawią się ułamki przedstawiające tę samą liczbę.

Można pokazać, że suma dwu zbiorów przeliczalnych też jest zbiorem przeliczalnym. Wynika stąd, że również zbiór wszystkich (dodatnich i ujemnych) liczb wymiernych jest przeliczalny. A co ze zbiorem liczb rzeczywistych? Okazuje się. że zbiór liczb rzeczywistych **nie jest przeliczalny**. Udowodnimy to metodą niewprost.

Załóżmy, że zbiór liczb rzeczywistych jest przeliczalny. Oznacza to, że wszystkie liczby rzeczywiste można ustawić w ciąg. Na przykład taki. Dlaczego w każdej z liczb podkreśliliśmy jedną cyfrę, wyjaśni się za chwilę.

$$\begin{aligned} a_0 &= 7,\underline{1}235... \\ a_1 &= 5,0\underline{3}16... \\ a_2 &= 0,37\underline{0}1... \\ a_3 &= 2,818\underline{9}... \end{aligned}$$

....

Pokażemy teraz, że wbrew założeniu ta lista nie może zawierać wszystkich liczb. W tym celu zbudujemy liczbę rzeczywistą c, która nie występuje na tej liście. Najpierw utwórzmy liczbę, której kolejnymi cyframi będą podkreślone cyfry.

$$7,1309.......$$

A teraz zmieńmy cyfry: wszystkie małe cyfry (mniejsze lub równe 5) zastąpmy przez 8, a cyfry duże (większe od 5) zastąpmy przez 1.

$$1,8881.....$$

Widzimy, że $c \neq a_0$, gdyż obie liczby różnią się cyfrą przed przecinkiem. Także $c \neq a_1$, bo się od niej różni na pierwszym miejscu po przecinku. Nie może to być a_2, gdyż różni się od niej na drugim miejscu po przecinku itd. Ogólnie. Nie może być $c = a_n$, bo z określenia c wynika, że obie liczby na pewno różnią się na $n-$tym miejscu po przecinku: jeżeli w a_n jest na tym miejscu mała cyfra, to w liczbie c duża, a jeżeli w a_n jest duża cyfra, to w c mała. Tak więc założenie, że liczb rzeczywistych jest przeliczalnie wiele prowadzi do sprzeczności.

Odkrycie, że zbiór liczb rzeczywistych nie jest przeliczalny to dzieło Georga Cantora (1845-1918). Z prac Cantora wyrosła cała osobna dyscyplina matematyczna — teoria mnogości — zajmująca się badaniem zbiorów, głównie nieskończonych. Odpowiednikiem pojęcia liczebności zbioru jest w teorii mnogości **moc zbioru** czyli jego **liczba kardynalna**. Moc zbioru N oznaczamy pierwszą literą alfabetu hebrajskiego $\aleph_0$ (czyt. *alef zero*), a moc zbioru liczb rzeczywistych R oznaczamy gotycką literą c (czyt. *kontinuum*). Liczby kardynalne zbiorów skończonych to po prostu liczby naturalne. Tak więc znamy następujące liczby kardynalne:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ ....,\ \aleph_0,\ c,\ ...$$

Cantor sformułował hipotezę, że nie ma liczb kardynalnych pomiędzy $\aleph_0$ a c. Hipoteza ta znana jest jako **hipoteza continuum**. Z hipotezy continuum wynikałoby, że każdy niskończony podzbiór zbioru liczb rzeczywistych jest albo równoliczny z N (ma moc $\aleph_0$) albo ze zbiorem R (i wówczas ma moc continuum). Hipoteza continuum pozostawała podstawowym problemem teorii mnogości i jednym z najważniejszych nierozwiązanych problemów matematyki przez ponad 80 lat. W roku 1963 amerykański matematyk Paul Cohen wykazał, że hipotezy continuum nie można ani udowodnić ani obalić. Oznacza to, że intuicyjne własności zbiorów na jakich opierają się matematycy nie wystarczą do rozstrzygania bardziej subtelnych pytań abstrakcyjnej matematyki. Od czasów Cohena z taką sytuacją matematyka stykała się wielokrotnie.

Wspomnijmy jeszcze, że teoria mnogości należy do tych dyscyplin matematycznych, w których ogromną rolę odegrała matematyka polska. Spośród kilkudziesięciu nazwisk matematyków polskich, jakie weszły do historii teorii mnogości wspomnijmy Sierpińskiego, Kuratowskiego, Tarskiego, Banacha, Ulama, Steinhausa czy Mycielskiego.

Zadania

1. Jak pokazać, że każde dwa okręgi na płaszczyźnie są równoliczne?

2. Czy zbiór liczb niewymiernych jest przeliczalny, czy nieprzeliczalny? Wskazówka: Suma dwu zbiorów przeliczalnych jest zbiorem przeliczalnym.

3. Uzasadnij, że płaszczyzny nie można pokryć przeliczalnym zbiorem prostych. Wskazówka: Rozważ prostą, o kierunku innym niż wszystkie pozostałe.

4. Wykaż, że po usunięciu z płaszczyzny przeliczalnego zbioru punktów płaszczyzna nie rozpadnie się. Wskazówka: Pokaż, że każde dwa punkty „dziurawej płaszczyzny” można połączyć linią.