Spacery losowe w $\mathbb{R}^d$

Tomasz Żak

Politechnika Wrocławska

6 lipca 2010

Błądzenie losowe (spacer losowy) to podstawowy przykład łańcucha Markowa, obowiązkowo pojawiający się na jednym z pierwszych wykładów o procesach stochastycznych.

Przypuśćmy, że cząstka błądzi losowo w $\mathbb{R}^d$ po kracie punktów o wszystkich współrzędnych całkowitych.

Błądzenie jest symetryczne, gdy z danego punktu cząstka może skoczyć do jednego z $2d$ najbliższych punktów tej kraty, do każdego z nich z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2d}$.

W szczególności na prostej (błądzenie po $\mathbb{Z}$) cząstka z punktu k skacze z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$ do jednego z punktów sąsiednich: $k-1$ albo $k+1$.

Błądzenia po kracie $\mathbb{Z}^d$

W roku 1921 G. Polya wykazał, że w takim błądzeniu cząstka wróci z prawdopodobieństwem jeden do punktu wyjścia w przypadku prostej i płaszczyzny tzn. dla wymiarów $d = 1$ oraz $d = 2$.

Polya żartobliwie skwitował to twierdzenie uwagą „na płaszczyźnie wszystkie drogi prowadzą do Rzymu”.

Błądzenia po kracie $\mathbb{Z}^d$

W roku 1921 G. Polya wykazał, że w takim błądzeniu cząstka wróci z prawdopodobieństwem jeden do punktu wyjścia w przypadku prostej i płaszczyzny tzn. dla wymiarów $d = 1$ oraz $d = 2$.

Polya żartobliwie skwitował to twierdzenie uwagą, że „na płaszczyźnie wszystkie drogi prowadzą do Rzymu".

W wyższych wymiarach $(d \geqslant 3)$ z dodatnim prawdopodobieństwem cząstka nigdy nie wróci do punktu wyjścia, a jej odległość od punktu wyjścia z prawdopodobieństwem jeden zmierza wraz z liczbą kroków do nieskończoności.

Sformułowanie problemu

27 lipca 1905 roku w 72. numerze *Nature* ukazał się następujący list Karla Pearsona:

The problem of the random walk

Can any of your readers refer me to a work wherein I should find a solution of the following problem, or failing the knowledge of any existing solution provide me with an original one? I should be extremely grateful for aid in the matter.

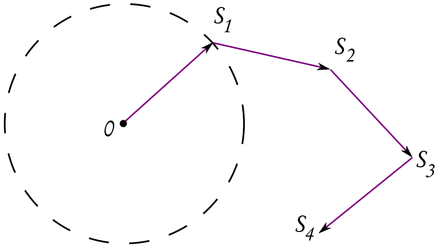
A man starts from a point O and walks l yards in a straight line; he then turns through any angle whatever and walks another l yards in a second straight line. He repeats this process n times. I require the probability that after n of these stretches he is at a distance between r and $r + \delta r$ from his starting point, O.

The problem is one of considerable interest, but I have only succeeded in obtaining an integrated solution for two stretches. I think, however, that a solution ought to be found, if only in the form of a series of powers of r/n, when n is large.

KARL PEARSON.
The Gables, East Ilsley, Berks.

Ogólne matematyczne sformułowanie problemu

Niech $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie, jednostajnym na sferze o promieniu l w $\mathbb{R}^d$. Znaleźć rozkład normy sumy $S_n = X_1 + ... + X_n$.



Załóżmy $l = 1$ i obliczmy dystrybuantę rozkładu normy $X_1 + X_2$, gdzie oba wektory są niezależne i mają jednakowy rozkład, jednostajny na okręgu jednostkowym.
Korzystamy ze wzoru cosinusów:

$$P(|X_1+X_2|^2 < t^2) = P(|X_1|^2+|X_2|^2+2|X_1||X_2|\cos\angle(X_1,X_2) < t^2) =$$

$$P(2+2\cos\angle(X_1,X_2) < t^2),$$

skąd dla $0 < t < 2$ otrzymujemy

$$P(|S_2| < t) = \frac{1}{\pi}\arccos\left(1-\frac{t^2}{2}\right).$$

Przypadek $d = 2$

Stąd rozkład $S_2 = X_1 + X_2$ ma gęstość względem płaskiej miary Lebesgue'a, gęstość ta dana wzorem: dla $r = \sqrt{x^2 + y^2} < 2$

$$f_2(r) = \frac{1}{\pi^2 r \sqrt{4 - r^2}}.$$

Zauważmy, że gęstość dąży do niekończoności, gdy $r \to 0^+$ lub $r \to 2^-$.

W następnym (!) zeszycie tego samego numeru *Nature* (z dnia 3 sierpnia 1905) ukazała się odpowiedź:

The problem of the random walk

This problem, proposed by Prof. Karl Pearson in the current number of NATURE, is the same as that of the composition of n iso-periodic vibrations of unit amplitude and of phases distributed at random, considered in *Phil. Mag.*, x., p. 73, 1880; xlvii., p. 246, 1899; ('Scientific Papers', i., p. 491, iv., p. 370).

If n be very great, the probability sought is

$$\frac{2}{n} e^{-r^2/n} r\, dr.$$

Probably methods similar to those employed in the papers referred to would avail for the development of an approximate expression applicable when n is only moderately great.

RAYLEIGH.
Terling Place, July 29.

W **następnym tygodniu** w kolejnym zeszycie *Nature* (z dnia 10 sierpnia 1905) ukazał się kolejny list Pearsona:

The problem of the random walk

I have to thank several correspondents for assistance in this matter. Mr G.J. Bennett finds that my case $n = 3$ can really be solved by elliptic integrals, and, of course, Lord Rayleigh's solution for n very large is most valuable, and may very probably suffice for the purposes I have immediately in view. I ought to have known it, but my reading of late years has drifted into other channels, and one does not expect to find the first stage in a biometric problem provided in a memoir on sound. From the purely mathematical standpoint, it would still be very interesting to have a solution for n comparatively small. The sections through the axis of Lord Rayleigh's frequency surface for large n are simply the 'cocked hat' or normal curve of errors type; for $n = 2$ or 3 they do not resemble this form at all. For $n = 2$, for example, the sections are of the form of a double U, thus UU, the whole being symmetrical about the centre vertical corresponding to $r = 0$, but each U itself being asymmetrical. The system has three vertical asymptotes. It would be interesting to see how the multiplicity of types for small n passes over into the normal curve of errors type when n is made large.

The lesson of Lord Rayleigh's solution is that in open country the most probable place of finding a drunken man who is at all capable of keeping on his feet is somewhere near his starting point.

KARL PEARSON.

Skąd takie pytanie?

Brytyjski lekarz sir Ronald Ross (1857-1932) zajmował się malarią. Wykazał, że malarię roznoszą komary, miedzy innymi za to w roku 1902 otrzymał Nagrodę Nobla z medycyny.

Szczególnie malaria zaczęła się rozprzestrzeniach na półwyspie Malajskim (wówczas brytyjskim) po wycieciu dużych połaci tamtejszej dżungli. Notabene dżunglę wycięto, by sadzić drzewa kauczukowe, nasiona ktorych wykradziono z Brazylii, co przyczyniło się do upadku części gospodarki brazylijskiej (np. miasta Manaus).

Skąd takie pytanie?

W liście do Pearsona z dnia 24 lipca 1905 roku Ross pytał:

„if mosquitoes could wander in all directions, what would be the mathematical function of the numbers who died at a distance from the point"?

Stąd list Pearsona opublikowany w *Nature*, który to list **ukazał się drukiem** 27 lipca 1905.

Tempo druku w początku XX wieku

Kolejne listy datowane są następująco:

- Ross do Pearsona 24 lipca 1905

Tempo druku w początku XX wieku

Kolejne listy datowane są następująco:

- Ross do Pearsona 24 lipca 1905
- Pierwszy list Pearsona ukazał się w *Nature* 27 lipca 1905

Tempo druku w początku XX wieku

Kolejne listy datowane są następująco:

- Ross do Pearsona 24 lipca 1905
- Pierwszy list Pearsona ukazał się w *Nature* 27 lipca 1905
- Odpowiedź Rayleigha w *Nature* 3 sierpnia 1905

Tempo druku w początku XX wieku

Kolejne listy datowane są następująco:

- Ross do Pearsona 24 lipca 1905
- Pierwszy list Pearsona ukazał się w *Nature* 27 lipca 1905
- Odpowiedź Rayleigha w *Nature* 3 sierpnia 1905
- Drugi list Pearsona w *Nature* 10 sierpnia 1905

Błądzenie po $\mathbb{Z}$ na prostej

Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi, przyjmującymi tylko dwie wartości $P(X_n = \pm 1) = \frac{1}{2}$. Suma

$$S_n = X_1 + \ldots + X_n$$

ma „przesunięty rozkład Bernoulliego", tzn.

$$P(S_n = 2k - n) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n, \qquad k = 0,\ 1,\ \ldots n-1,\ n.$$

Badanie subtelnych własności takich rozkładów doprowadziło do odkrycia Prawa Wielkich Liczb, Centralnego Twierdzenia Granicznego, Prawa Iterowanego Logarytmu oraz Prawa Arcusa Sinusa — czterech najważniejszych twierdzeń klasycznego rachunku prawdopodobieństwa.

Na przykład twierdzenie de Moivre'a – Laplace'a mówi, że dystrybuanty zmiennych $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ dążą do Φ — dystrybuanty rozkładu $N(0,1)$, tzn. gdy $n \to \infty$

$$\forall \quad t \in \mathbb{R} \qquad P\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} < t\right) \quad \longrightarrow \quad \Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-x^2/2}\, dx.$$

Jak szybko te dystrybuanty dążą do Φ?

Nierówność Hoeffdinga (1948) mówi, że dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ oraz $t > 0$

$$P\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} > t\right) \leqslant e^{-t^2/2}.$$

W roku 1994 J. Pinelis udowodnił, że dla takiego błądzenia zachodzi lepsze oszacowanie

$$P\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} > t\right) \leqslant C(1 - \Phi(t)), \qquad t > 0.$$

Lepsze, gdyż dla $t \to \infty$ zachodzi $1 - \Phi(t) \leqslant \frac{C_1}{t} e^{-t^2/2}$.

Z kolei S.V. Fomin w pracy z 1982 roku wykazał, że jeśli X_i mają rozkłady jednostajne na odcinku $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$, to gęstości f_n zmiennych $\frac{X_1+\ldots+X_n}{\sqrt{n}}$ są wspólnie ograniczone przez pewną wielokrotność granicznej gęstości gaussowskiej:

istnieje stała $C > 0$ taka, że dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ oraz $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność

$$f_n(x) \leqslant Ce^{-x^2/2}.$$

Założenia upraszczające w $\mathbb{R}^d$

Badamy w $\mathbb{R}^d$ błądzenie Pearsona, gdzie każdy krok jest wektorem losowym o rozkładzie jednostajnym na sferze jednostkowej.

Dla uproszczenia rachunków zakładamy, że błądzenie startuje z początku układu współrzędnych.

Sploty miary jednostajnej na sferze

Niech $X_1, \ldots$ mają jednakowy rozkład, jednostajny na sferze w $\mathbb{R}^d$. Oznaczmy ten rozkład przez σ_d. Jest to miara unormowana, na przykład na okręgu jednostkowym $d\sigma_2(\theta) = \frac{1}{2\pi}\, d\theta$.

Rozkład sumy $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ dany jest przez splot σ_d^{*n}.

Dla wszystkich n jest to miara niezmiennicza na obroty, zatem wygodnie rozważać ją we współrzędnych sferycznych (r, s), gdzie $0 < r < \infty$, a $s \in S_1^{d-1}$.

Transformata Fouriera miary σ_d

Niech $t \in \mathbb{R}^d$. Przechodząc do współrzędnych sferycznych, otrzymujemy

$$\widehat{\sigma_d}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle t,x\rangle}\, d\sigma_d(x) = \int_{S_1^{d-1}} e^{i\langle t,s\rangle}\, d\sigma_d(s) =$$

$$\int_{S_1^{d-1}} e^{i|t|\langle \frac{t}{|t|},s\rangle}\, d\sigma_d(s) = \ldots = \Gamma\left(\frac{d}{2}\right)\left(\frac{2}{|t|}\right)^{d/2-1} J_{d/2-1}(|t|),$$

gdzie

$$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\frac{z^2}{4})^k}{k!\Gamma(\nu+k+1)}.$$

jest funkcją Bessela pierwszego rodzaju.

Absolutna ciągłość splotów

Ponieważ

$$\widehat{\sigma_d}(t) = \Gamma\left(\frac{d}{2}\right)\left(\frac{2}{|t|}\right)^{d/2-1} J_{d/2-1}(|t|),$$

a dla $t \to \infty$ znane jest asymptotyczne zachowanie funkcji Bessela:

$$J_\nu(|t|) \ \sim \ \sqrt{\frac{2}{\pi|t|}}\cos\left(|t| - \frac{1}{2}\nu\pi - \frac{1}{4}\pi\right),$$

więc dla $n > d + 2$ funkcja $(\widehat{\sigma_d}(t))^n$ jest całkowalna. Stąd wynika, że sploty σ_d^{*n} są absolutnie ciągłe.

Niech $f_n(x)$ oznacza gęstość miary σ_d^{*n} względem miary Lebesgue'a w $\mathbb{R}^d$, tzn. rozkład $X_1 + \ldots + X_n$.

Rachunki dokładne

Oczywiście, na mocy odwrotnej transformaty Fouriera, mamy wzór

$$f_n(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle x,t\rangle} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \left(\frac{2}{|t|}\right)^{d/2-1} J_{d/2-1}(|t|)\, dt.$$

Jeszcze w roku 1905 G.J. Bennett wykazał, że dla $d = 2$ i $n = 3$ to jest pewna funkcja nieelementarna (całka eliptyczna).
Prawdopodobnie tak jest dla większości par d, n.

Ponieważ funkcje Bessela oscylują, więc trudno z tego wzoru otrzymać dokładne oszacowania funkcji f_n.
A chcielibyśmy sprawdzić, czy tak, jak na prostej (wspomniany wynik Fomina), gęstości $f_n(x)$ są wspólnie ograniczone przez pewną wielokrotność granicznej gęstości gaussowskiej.

Graniczna gęstość gaussowska

Łatwo obliczyć, ze macierz kowariancji K miary σ_d jest równa $\frac{1}{d} Id$.

Stąd wynika, że graniczną gęstością gaussowską w $\mathbb{R}^d$ jest

$$g_d(x) = \left(\frac{d}{2\pi}\right)^{d/2} e^{-\frac{d|x|^2}{2}}.$$

i pytamy, czy zachodzi oszacowanie

$$(\sqrt{n})^d f_n(\sqrt{n}\, x) \leqslant C_d \left(\frac{d}{2\pi}\right)^{d/2} e^{-\frac{d|x|^2}{2}}.$$

Odpowiedź

Twierdzenie (P. Graczyk, J-J. Loeb, TŻ, TPRF, 2010)

Ustalmy d*. Istnieje stała* C_d *zależna tylko od wymiaru przestrzeni, taka, że dla wszystkich* $n \geqslant d+2$ *i* $x \in \mathbb{R}^d$ *zachodzi oszacowanie*

$$f_n(x) \leqslant C_d \left(\frac{d}{2\pi n}\right)^{d/2} e^{-\frac{d|x|^2}{2n}}.$$

Analogiczne twierdzenie jest prawdziwe w przypadku, gdy poszczególne kroki błądzenia mają rozkłady jednostajne na kuli jednostkowej.

Nierówność dla części radialnych

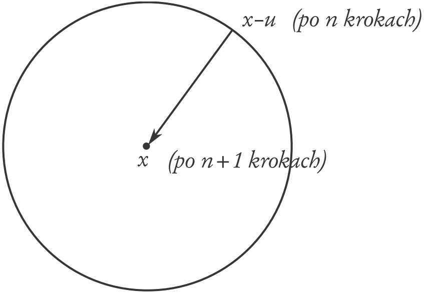
Ponieważ zarówno miara gaussowska o macierzy kowariancji K, jak i wszystkie rozkłady σ_d^{*n} są niezmiennicze na obroty, więc wystarczy wykazać nierówność dla części radialnych:

$$\tilde{f}_n(r) \leqslant \frac{C_d}{n^{d/2}} e^{-\frac{dr^2}{2n}} .$$

Główny pomysł

Zauważmy, że

$$f_{n+1}(x) = \int_{S_1^{d-1}} f_n(x-u)\, d\sigma_d(u).$$



A gdyby zastosować indukcję matematyczną?

Oszacowanie dla f_{d+2}

Ponieważ w $d+2$ krokach o długości jeden można oddalić się od punktu startu co najwyżej o $d+2$, więc dla $|x| > d+2$ mamy $f_{d+2}(x) = 0$.

Stąd istnieje stała c taka, że dla wszystkich $x \in \mathbb{R}^d$ zachodzi nierówność

$$f_{d+2}(x) < c g_{d+2}(x),$$

gdzie g_{d+2} oznacza odpowiednio unormowaną gęstość gaussowską.

Krok indukcyjny

Zamiast $f_n(x)$ po prawej stronie wzoru

$$f_{n+1}(x) = \int_{S_1^{d-1}} f_n(x-u)\, d\sigma_d(u).$$

wstawiamy założenie indukcyjne (sprawdzone już dla $n = d+2$):

$$f_n(r) \leqslant \frac{C_d}{n^{d/2}} e^{-\frac{dr^2}{2n}},$$

Krok indukcyjny

otrzymując nierówność

$$f_{n+1}(r) \leqslant \frac{C_d}{n^{d/2}}\Gamma(d/2)e^{-\frac{d(r^2+1)}{2n}} \left(\frac{2n}{dr}\right)^{d/2-1} I_{d/2-1}\left(\frac{dr}{n}\right),$$

gdzie

$$\frac{I_\alpha(x)}{(x/2)^\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2k}}{k!\Gamma(\alpha+k+1)}$$

jest zmodyfikowaną funkcją Bessela rzędu α.

Krok indukcyjny

Wystarczy teraz sprawdzić, czy zachodzi nierówność

$$\Gamma(d/2)\left(\frac{2n}{dr}\right)^{d/2-1} I_{d/2-1}\left(\frac{dr}{n}\right) \leqslant \left(\frac{n}{n+1}\right)^{d/2} e^{\frac{d(r^2+1)}{2n}-\frac{d(r^2+1)}{2n}},$$

co po kilku stronach rachunków (dokładnej analizy zachowania funkcji Bessela) udało się zrobić.

Podobne, choć dłuższe rachunki, pozwalają udowodnić analogiczne twierdzenie, gdy kroki błądzenia mają rozkłady jednostajne na kuli jednostkowej w $\mathbb{R}^d$.