Algebra z geometrią

Lista 1 - Liczby zespolone

1. Oblicz
   a) $(1+i)(2-i)$; b) $(3+2i)^2$; c) $(2+i)(2-i)$; d) $(3-i)/(1+i)$;
   e) $(1+i\sqrt{3})/(2+i\sqrt{3})$; f) $(2+i)^3$; g) $(\sqrt{3}-i)^3$; h) $(-\sqrt{2}+i\sqrt{3})^2$

2. Korzystając ze wzoru dwumianowego Newtona oblicz:
   a) $(2-3i)^4)$; b) $(2+i)^5$; c) $(1-i)^6$; d) $(-1+i\sqrt{2})^4$.

3. Dla jakich liczb zespolonych zachodzi równość:
   a) $\operatorname{Re} z^2 = 0$; b) $\operatorname{Im} z < \operatorname{Re} z$; c) $\operatorname{Im} z^2 < 8$?

4. Przedstaw na płaszczyźnie zespolonej zbiór liczb z spełniających warunek:
   a) $|z-i| = 1$; b) $|z+1| = 2$; c) $|2z+4| > 6$; d) $|z+1| = |z-i|$
   e) $|z^2+1| = |z+i|$; f) $|z+i| + |z-i| = 2$; g) $|z| = z\overline{z}$; h) $z+\overline{z} = 2|z|$.
   Tam, gdzie to możliwe korzystaj z geometrycznej interpretacji różnicy modułu.

5. Korzystając ze wzoru de Moivre'a oblicz:
   a) $(1+i)^{33}$; b) $(1+i\sqrt{3})^{10}$; c) $(\sqrt{3}-i)^{100}$; d) $(2-i\sqrt{12})^{20}$ e) $(\sin 2\pi/5 - i\cos 2\pi/5))^5$.

6. Znajdź pierwiastki wskazanego stopnia i zaznacz je na płaszczyźnie zespolonej:
   a) $\sqrt[3]{-8}$; b) $\sqrt[2]{16i}$; c) $\sqrt[4]{-1}$; d) $\sqrt[8]{1}$.

7. Znajdź pierwiastki kwadratowe z $8+6i$.

8. Sprawdź, że $1-i\sqrt{2}$ jest jednym z pierwiastków czwartego stopnia liczby $-7+4i\sqrt{2}$. Znajdź pozostałe.

9. Korzystając ze wzorów Newtona i de Moivre'a wyprowadź wzór wyrażający:
   a) $\sin 3\alpha$ w zależności od $\sin\alpha$; b) $\cos 5\alpha$ w zależności od $\cos\alpha$.

$\diamond\diamond\diamond$

10. Znajdź wszystkie pierwiastki trzeciego stopnia z jedynki nie korzystając z postaci trygonometrycznej.

11. Korzystając ze wzoru Newtona dla $(1+1)^n$ oraz $(1-1)^n$ wyprowadź wzór na sumę

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots$$

W analogiczny sposób wyprowadź wzór na sumę

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{4} + \binom{n}{8} + \dots$$

Lista 2 - Wielomiany i krzywe stożkowe

1. Znajdź iloraz i resztę z dzielenia $z^4 + z^2 + z + 1$ przez $z^2 - 1$.

2. Wielomian $w(z)$ daje przy dzieleniu przez $z^2 + i$ iloraz $z^2 - i$ oraz resztę $2z + 1$. Znajdź wielomian $w(z)$.

3. Nie wykonując dzielenia znajdź: a) resztę z dzielenia $z^{10} - z$ przez $z - 2$; b) resztę z dzielenia $z^{11} + z^{10} + 1$ przez $z^2 + 1$.

4. Rozwiąż równanie kwadratowe:

   a) $z^2 - 2z + 2 = 0$; b) $2z^2 + 2z + 1 = 0$; c) $z^2 - 8zi = 25$.

5. Rozwiąż równanie $z^4 - 4z^3 + 8z^2 - 8z + 4 = 0$ wiedząc, że jednym z jego pierwiastków jest $1 + i$.

6. Rozłóż na czynniki liniowe:

   a) $z^4 - 1$; b) $z^4 + 2z^2 + 1$; c) $z^4 - 8z$;
   d) $z^4 + z^2 + 1$; e) $z^6 - 1$; f) $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$.

7. Odgadnij pierwiastek i rozłóż wielomian na czynniki liniowe $x^3 - 4x^2 + 8$.

8. Rozwiąż równanie $2x^3 + x^2 + x = 1$.

9. Znajdź równanie rzeczywiste, którego rozwiązaniem są cztery wierzchołki kwadratu $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$ oraz $(-1, -1)$.

10. Rozłóż na rzeczywiste ułamki proste:

    a) $\dfrac{1}{x^3 - x}$; b) $\dfrac{x}{x^3 + 1}$; c) $\dfrac{x}{x^4 - 1}$; d) $\dfrac{1}{x(x - 2)^2}$; e) $\dfrac{x^3}{x^2 - 1}$.

11. Znajdź środek i promień okręgu $x^2 + 6x + y^2 + 2y = 0$.

12. Znajdź ogniska (lub ognisko i kierownicę) i naszkicuj:

    a) $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$; b) $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{3} = 1$; c) $\dfrac{y^2}{3} - \dfrac{x^2}{6} = 1$; d) $2y^2 - x^2 = 1$;
    e) $x + 1 = 4y^2$; f) $y^2 + 2y - 2x^2 = 3$; g) $(y + 2)^2 = x - 2$; h) $x^2 + 2x - 2y^2 + 4y = 0$.

13. Okrąg jednostkowy o środku w początku współrzędnych można zapisać za pomocą liczb zespolonych równaniem $|z| = 1$. Zapisz za pomocą liczb zespolonych:

    a) elipsę o ogniskach $F_1 = (-2, 1)$, $F_2 = (2, 1)$ oraz osi $2a = 6$;

    b) hiperbolę o tych ogniskach i wierzchołkach $(-1, 1)$ oraz $(1, 1)$.

$\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit$

14. Rozłóż wielomian $z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$ na nierozkładalne czynniki rzeczywiste.

15. Wykaż, że jeśli pierwiastkami równania czwartego stopnia o współczynnikach rzeczywistych są cztery różne liczby nierzeczywiste, to tworzą one trapez bądź leżą na jednej prostej.

16. Rozwiąż równanie $x^3 + 3x = 5$ metodą Cardana. W tym celu podstaw $x = u - v$. Dobierz u oraz v tak, aby otrzymać układ równań $u^3 - v^3 = 5$, $uv = \ldots$.

17. Wiadomo, że dwie różne stożkowe przecinają się co najwyżej w czterech punktach. Wykaż, że sześć punktów elipsy nie będącej okręgiem nie może tworzyć sześciokąta foremnego. A co z innymi wielokątami foremnymi?

18. Jak wygląda zbiór punktów $P = (x, y)$ spełniających równanie $x^4 + 1 = y^4 + 2x^2$?

Lista 3 - Geometria płaszczyzny i przestrzeni

1. Znajdź równanie prostej przechodzącej przez punkty:

   a) $P = (0, 2)$, $Q = (-3, 0)$; b) $P = (-1, 2)$, $Q = (-1, 1)$; c) $P = (1, 3)$, $Q = (4, 3)$.

2. Prosta l opisana jest równaniem $y-2 = k(x-3)$. Znajdź równanie prostej: a) równoległej do l i przechodzącej przez punkt $(1, -2)$; b) prostopadłej do l przechodzącej przez początek układu; c) prostopadłej do l i przechodzącej przez punkt $(-3, 4)$.

3. Dla jakich parametrów wektory $\mathbf{u} = [a, b, 1]$ oraz $\mathbf{v} = [4, a, b]$
   a) równoległe; b) prostopadłe?

4. Niech $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$ będą promieniami wodzącymi punktów A, B. Wyraź za ich pomocą wektor wodzący punktu P dzielącego odcinek AB w stosunku $k : 1$ (tzn. $|AP| = k \cdot |PB|$).

5. Znajdź kąt pomiędzy przekątnymi równoległoboku rozpiętego przez wektory
   $\mathbf{u} = [2, 1, 0]$ oraz $\mathbf{v} = [-1, 3, 2]$.

6. Znajdź kąt pomiędzy przekątnymi AF i AH ścian sześcianu $ABCDEFGH$:

   a) korzystając z iloczynu skalarnego;

   b) bez użycia iloczynu skalarnego.

7. Wiadomo, że $|\mathbf{u}| = 2$, $|\mathbf{v}| = 3$, $\mathbf{u} \circ \mathbf{v} = 1$. Korzystając z własności iloczynu skalarnego oblicz $(2\mathbf{u} + \mathbf{v}) \circ (\mathbf{u} - 2\mathbf{v})$.

8. Korzystając z iloczynu skalarnego uzasadnij, że równoległobok jest rombem wtedy i tylko wtedy, gdy jego przekątne są prostopadłe.

9. Wektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ oraz $\mathbf{d}$ są promieniami wodzącymi kolejnych wierzchołków czworokąta. Jaka zachodzi pomiędzy nimi zależność, jeżeli czworokąt jest: a) równoległobokiem;

   b) rombem; c) kwadratem?

10. Znajdź równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt $P = (1, 2, -3)$: a) prostopadłej do prostej $x = t$, $y = t + 2$, $z = 3t - 1$; b) zawierającej oś Oz.

11. W jakich punktach płaszczyzna $x + 3y - 2z = 6$ przecina osie układu?

12. Znajdź równanie parametryczne prostej zadanej układem $x + y + 2z = 4$, $3x - y + z = 3$. Znajdź odległość tej prostej od początku układu.

13. Znajdź odległość pomiędzy płaszczyzną $x + 2y + 3z = 6$ a:

    a) początkiem układu; b) płaszczyzną $2x + 4y + 6z = 6$.

♢ ♢ ♢

14. Znajdź odległość pomiędzy prostymi $x = t + 1$, $y = 2t + 1$, $z = 3t + 2$ oraz $x = -t + 1$, $y = 2t - 1$, $z = 4t$.

15. Jaką krzywą przedstawia linia $x = (t + 1)^2$, $y = t^2 + 2t$, $z = (t + 3)(t - 1)$?

16. Korzystając z wektorów uzasadnij, że proste łączące wierzchołki czworościanu ze środkami ciężkości przeciwległych ścian przecinają się w jednym punkcie.

Lista 4 - Układy równań liniowych i macierze

1. Rozwiąż układy równań korzystając z metody eliminacji:

a) $\begin{cases} x + 2y - 3z = 1, \\ 2x - 3y + z = 2, \\ 4x + 2y - 3z = 7; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y + 2z = 7, \\ x + 2y + z = 8, \\ 2x + y + z = 9, \\ x + y + z = 7; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y - z + 3t = 4, \\ 2x - 3y - 2z = 2, \\ x + 6y - z + 9t = 10; \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x + 3y + z + 2t = 8, \\ 3x + y + 2z + t = 7, \\ 4x - y + 3z = 6. \end{cases}$

2. Dla macierzy A, B, C, D oblicz wszystkie możliwe iloczyny (w tym kwadraty):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

3. Wskaż przykłady macierzy 2×2 takich, że: a) $A^2 = I$, ale $A \neq I$; b) A^2 jest macierzą zerową, ale A różną od zera.

4. Pokaż, że dla macierzy A, B zachodzi wzór $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $AB = BA$. Przy jakich założeniach $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$? Czy prawdą jest, że $(A + I)(A - I) = A^2 - I$? Czy $A^3 - I = (A - I)(A^2 + A + I)$?

5. Uzasadnij, że dla dowolnych macierzy kwadratowych tego samego stopnia $AB + BA$ jest macierzą symetryczną. Co można powiedzieć o macierzy $AB - BA$?

6. Wykaż, że każda macierz kwadratowa jest sumą macierzy symetrycznej i antysymetrycznej.

7. Równanie

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}$$

przy odpowiednich założeniach odnośnie macierzy (jakich?) jest równaniem parametrycznym płaszczyzny w R^3, przechodzącej przez początek układu współrzędnych. Zapisz za pomocą macierzy równanie

a) parametryczne płaszczyzny przechodzącej przez punkt $(1, 2, 3)$;

b) parametryczne prostej w R^3 przechodzęjej przez punkt $(1, 0, -2)$;

c) ogólne (bądź normalne) płaszczyzny w R^3;

d) krawędziowe prostej w R^3;

e) parametryczne płaszczyzny w R^4.

8. Na pewnym osiedlu buduje się dwa rodzaje domów. Przyjmijmy, że każdy z nich wykorzystuje tylko trzy rodzaje materiałów: drewno, szkło i metal. Macierz A przedstawia zużycie tych surowców przy budowie I i II domu (I i II kolumna); macierz B — koszt jednostkowy każdego z surowców, C — liczbę domów I i II typu.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} p & q & r \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Co opisują macierze otrzymane jako iloczyn dwu albo trzech spośród nich? Nie każdy iloczyn ma sens!

9. Oblicz macierze odwrotne metodą macierzy dołączonej (tzn. za pomocą odpowiednich operacji elementarnych na wierszach):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

10. Wyraź macierz X za pomocą macierzy A, B, C: a) $AXB = C$; b) $AX = I + BX$.

$\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit$

11. Jak zmieni się macierz kwadratowa stopnia 3, gdy pomnożymy ją prawostronnie przez macierz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Spróbuj zgadywać wynik zanim przystąpisz do rachunków.

12. Sprawdź, że równanie

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1$$

przedstawia równanie okręgu. Zapisz w podobnej postaci, za pomocą macierzy symetrycznych, równania:

a) $x^2 - y^2 = 1$; b) $x^2 + 2y^2 = 1$; c) $x^2 + 4xy + y^2 = 5$; d) $xy = 2$.

Uwaga: Macierze $[a]$ są utożsamiane tu z liczbą a.

13. Wiedząc, że poniższy układ jest oznaczony, rozwiąż go unikając kłopotliwych rachunków:

$$\begin{cases} x + 7y + 3z + 5t = 8, \\ 8x + 4y + 6z + 2t = -8, \\ 2x + 6y + 4z + 8t = 8, \\ 5x + 3y + 7z + t = -8. \end{cases}$$

14. Zapisz poniższy układ za pomocą jednego równania macierzowego wykorzystującego wyłącznie macierze 2×2:

$$\begin{cases} x + 2y = 5, \\ 3x + y = 1, \\ z + 2t = 7, \\ 3z + t = 8. \end{cases}$$

15. * Wykaż, że macierz $AB - BA$ nie jest macierzą jednostkową.

Algebra i geometria

Lista 5 - Wyznaczniki i ich zastosowania

1. Oblicz wyznaczniki

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{b)} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{c)} \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{vmatrix}; \quad \text{d)} \begin{vmatrix} 1 & 1+i & 2-i \\ 1-i & 2 & 3+2i \\ 2+i & 3-2i & 3 \end{vmatrix}.$$

2. Korzystając z podstawowych własności wyznaczników oblicz wyznaczniki poniższych macierzy. Które z tych macierzy są nieosobliwe?

$$\text{a)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}; \quad \text{b)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}; \quad \text{c)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{bmatrix}; \quad \text{d)} \begin{bmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 5^2 & 6^2 & 7^2 & 8^2 \\ 9^2 & 10^2 & 11^2 & 12^2 \\ 13^2 & 14^2 & 15^2 & 16^2 \end{bmatrix}.$$

3. Oblicz wyznaczniki wykorzystując odpowiednie własności i rozwinięcie Laplace'a:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}; \quad \text{b)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{c)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}; \quad \text{d)} \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

4. Rozwiąż za pomocą wzorów Cramera układ równań

$$\text{a)} \begin{cases} 2x - y + 2z = 4, \\ 5x + y + z = 6, \\ -x + 2y + 2z = 0; \end{cases} \qquad \text{b)} \begin{cases} x - 2y + 3z = 3, \\ 3x + y - 2z = 5, \\ x - y + 4z = 5. \end{cases}$$

5. Znajdź macierz odwrotną za pomocą wyznaczników i sprawdź otrzymany wynik wykonując odpowiednie mnożenie:

$$\text{a)} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{b)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{c)} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

6. Określ ilość rozwiązań w zależności od parametru p

$$\begin{cases} px + 2y + z = 1, \\ x - py + z = 2, \\ x + 2y + z = p. \end{cases}$$

7. Dane są punkty $A = [1,1,0]$, $B = [2,3,1]$, $C = [4,1,5]$. Znajdź:
   a) pole równoległoboku rozpiętego na wektorach $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$;
   b) wysokość (tzn. jej długość) trójkąta ABC poprowadzoną z wierzchołka A.

8. Oblicz iloczyny wektorowe:
   a) $[1,2,3] \times [2,3,4]$; b) $[2,3,4] \times [2,4,6]$; c) $[1,2,3] \times [2,4,6]$; d) $[1,2,3] \times [3,2,1]$.

9. Znajdź wszystkie wersory prostopadłe do obu wektorów $[1,2,3]$ oraz $[2,5,1]$ za pomocą: a) iloczynu skalarnego; b) iloczynu wektorowego.

10. Znajdź równanie parametryczne prostej o równaniu krawędziowym

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1, \\ -x + y + 2z = 3. \end{cases}$$

11. Oblicz iloczyny mieszane trójki wektorów:

    a) $[0,1,2]$, $[1,2,3]$, $[2,3,4]$; b) $[0,1,2]$, $[1,2,3]$, $[1,3,5]$; c) $[1,1,0]$, $[1,0,1]$, $[0,1,1]$.

12. Dane są punkty $A=[0,0,0]$, $B=[1,1,0]$, $C=[1,1,1]$ oraz $D=[0,1,1]$. Znajdź:

    a) objętość równoległościanu rozpiętego na wektorach $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$;

    b) objętość czworościanu $ABCD$.

13. Pokaż, że jeśli punkty $P_i=(x_i,y_i,z_i)$, gdzie $i=1,2,3$ nie leżą na jednej prostej, to

$$\det \begin{bmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix} = 0$$

jest równaniem płaszczyzny $P_1P_2P_3$. Co przedstawia to równanie, gdy te punkty są współliniowe?

$\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit$

14. Wiadomo, że jeśli wyznacznik macierzy kwadratowej jest równy zeru, to jeden z wierszy jest kombinacją liniową pozostałych (i na odwrót). Sprawdź, że jest tak dla poniższych wyznaczników:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 5 & 10 & 0 \end{vmatrix}; \quad \text{b)} \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 7 & 6 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{c)} \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 10 & 7 \end{vmatrix}.$$

15. Jaką wartość może mieć wyznacznik macierzy A, jeżeli a) $A^3=A$; b) $A^3=4A$.

16. Oblicz wyznaczniki (wg listy dr.M. Gewerta):

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 6 & 5 \end{vmatrix}; \quad \text{b)} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}; \quad \text{c)} \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 5 & 3 & \cdot & 0 \\ 0 & 2 & 5 & \cdot & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 5 \end{vmatrix}_{n\times n}.$$

Lista 6 - Przestrzeń R^n i inne przestrzenie liniowe

1. Zbadaj, czy jest przestrzenią liniową nad R:

   a) zbiór rozwiązań równania $x + y + z = 0$;

   b) zbiór rozwiązań równania $x + 2y = 1$;

   c) zbiór rozwiązań układu $x + y + z = 0$, $x - 2y + 3z = 0$;

2. Zbadaj liniową niezależność:

   a) wektorów $[1, 2, 3]$, $[2, 3, 5]$ oraz $[3, 5, 7]$ nad ciałem R;

   b) wektorów $[[1, 1, 2]$, $[1, 2, 1]$ oraz $[2, 7, -1]$ nad ciałem R;

   c) wektorów $[1, i]$ oraz $[i, -1]$ nad ciałem R;

   d) wektorów $[1, i]$ oraz $[i, -1]$ nad ciałem C;

   e) wektorów $[1, i]$ oraz $[i, 1]$ nad ciałem C;

3. Znajdź bazę i wymiar poniższych przestrzeni liniowych nad R:

   a) $\{(t, x, y, z) \in R^4 : t + x + y + 2z = 0\}$;

   b) $\{(t, x, y, z) \in R^4 : t + x = 0, 2t + y - z = 0\}$.

   Ile liczb rzeczywistych potrzeba, aby określić położenie punktu w obu przestrzeniach?

4. Znajdź rząd macierzy:

$$\text{a)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{b)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 2 & 5 & 2 & 5 \\ 4 & 9 & 8 & 13 & 12 & 17 \\ -1 & -5 & 9 & 5 & 19 & 15 \end{bmatrix}$$

   Wskaż bazę przestrzeni wierszy, bazę przestrzeni kolumn i niezerowy minor maksymalnego stopnia.

5. Znajdź wymiar przestrzeni rozwiązań układu $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, gdy macierz A ma 6 wierszy, 5 kolumn i rząd 3. Czy wszystkie informacje są istotne?

6. Przy jakich założeniach o macierzy A równanie $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ przedstawia: a) płaszczyznę w R^3; b) prostą w R^3; c) płaszczyznę w R^4?

7. Rozważmy równanie

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & b & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{bmatrix}.$$

   Znajdź wymiar przestrzeni rozwiązań w zależności od a, b.

8. W przestrzeni R^3 dwie płaszczyzny nie mogą stykać się dokładnie w jednym punkcie. Czy jest to możliwe w przestrzeni R^4?

9. Punkty $(\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1)$ są wierzchołkami tzw. hipersześcianu czterowymiarowego.

   a) Znajdź długość jego przekątnych.

   b) Pod jakim kątem się one przecinają.

   c) Znajdź równanie prostej zawierającej którąś z tych przekątnych.

   d) Znajdź równanie płaszczyzny zawierającej dwie przekątne.

10. Zbadaj, czy jest przestrzenią liniową nad R:

a) zbiór wielomianów stopnia n;

b) zbiór wielomianów stopnia mniejszego lub równego n;

c) zbiór funkcji $y(x)$ spełniających warunek $y'(x) = y(x)$;

d) zbiór funkcji $y(x)$ spełniających warunek $y'(x) = y(x) + 1$.

11. Zbadaj liniową niezależność nad R: a) $1 + x + x^2$, $1 - x + x^2$, $2x + 1$; b) $2 + x + x^2$, $1 - x$, $3x + x^2$; c) funkcji 1, $\sin x$ oraz $\cos x$.

12. Rozwiązanie ogólne równania różniczkowego $y'' + y = 0$ ma postać

$$y(t) = A \cos t + B \sin t.$$

Znajdź bazę i wymiar przestrzeni rozwiązań tego równania. Czy zbiór rozwiązań równania $y'' = y + 1$ jest przestrzenią liniową?

13. Znajdź bazę i wymiar poniższych przestrzeni liniowych nad R:

a) funkcji liniowych o współczynnikach rzeczywistych;

b) wielomianów $w(x)$ stopnia co najwyżej 4 takich, że $w(-x) = w(x)$;

c) rzeczywistych macierzy kwadratowych stopnia n;

d) rzeczywistych symetrycznych macierzy kwadratowych stopnia n;

e) zespolonych macierzy $m \times n$.

$\diamond\diamond\diamond$

14. Niech A będzie macierzą 3×3. Zbiór wektorów postaci

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

gdzie $x, y, z \in R$ jest podprzestrzenią liniową R^3. Jaki zachodzi związek pomiędzy wymiarem tej przestrzeni a własnościami macierzy A?

15. Niech M będzie rzeczywistą macierzą kwadratową stopnia 2. Uzasadnij, że istnieją liczby a, b, c, d, e takie, że

$$aM^4 + bM^3 + cM^2 + dM + eI = \mathbf{0}.$$

Uwaga: To zadanie nie wymaga rachunków!

16. Znajdź wymiar przestrzeni generowanej nad ciałem R przez funkcje 1, $\sin x$, $\cos x$, $\sin^2 x$, $\cos^2 x$.

17. W przestrzeni R nad ciałem Q wskaż nieskończony zbiór liniowo niezależny.

18. Znajdź rząd macierzy

$$\begin{bmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ f_1' & f_2' & f_3' \\ f_1'' & f_2'' & f_3'' \end{bmatrix}$$

dla funkcji: a) $f_1 = e^x$, $f_2 = e^{2x}$, $f_3 = e^{3x}$; b) $f_1 = 1$, $f_2 = \sin^2 x$, $f_3 = \cos^2 x$.

Lista 7 - Przekształcenia liniowe

1. Sprawdź, czy jest przekształceniem liniowym:
   a) $L(x, y) = (x + y, x)$; b) $L(x, y, z) = x + 2y$; c) $L(x, y) = (x, y + 1)$; d) $L(x, y) = x^2$;
   e) $L(f) = f'$; f) $L(f) = f + 1$; g) $L(f) = f(1)$.

2. Rozważmy przestrzeń macierzy kwadratowych ustalonego stopnia n. Czy jest przekształceniem liniowym:
   a) przyporządkowanie $A \to \det A$;
   b) przyporządkowanie $A \to \operatorname{tr} A$, gdzie $\operatorname{tr} A = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$ (ślad macierzy A)?

3. Znajdź macierz przekształcenia $L(x, y, z) = (x, y + z)$ w bazach standardowych.

4. Znajdź macierz przekształceń $L : R^3 \to R^3$:

   a) odbicia symetrycznego względem płaszczyzny Oxy;

   b) symetrii środkowej względem początku układu;

   c) obrotu o kąt α wokół osi Oz.

5. Znajdź jądro i obraz przekształcenia:

   a) $L(x, y, z) = (x, y, 0)$; b) $L(x, y, z) = (x+y, x-y, 2z)$; c) $L(x, y, z) = (x-y, y-z, z-x)$.

6. Znajdź wielomian charakterystyczny, wektory i wartości własne macierzy:
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

7. Znajdź wielomian charakterystyczny, wartości i wektory własne przekształcenia liniowego $L(x, y) = (x + 3y, 4x + 2y)$.

8. Korzystając z diagonalizacji macierzy A wyprowadź wzór na A^n, gdzie
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}.$$

9. Rozważmy przekształcenie $L(f) = f'$ określone na przestrzeni $R_3[x]$ (tzn. przestrzeni wielomianów zmiennej x stopnia co najwyżej 3, o współczynnikach rzeczywistych).

   Znajdź: a) jego jądro i obraz; b) wektory i wartości własne.

$\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit$

10. Dla przekształcenia liniowego $L : V \to V$ określonego na przestrzeni skończenie wymiarowej V zachodzi równoważność:
$$L \text{ jest różnowartościowe} \Leftrightarrow L \text{ jest „na”}.$$
    Czy równoważność taka zachodzi dla przestrzeni nieskończeniewymiarowych?

11. Każdej permutacji $\pi : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ odpowiada przekształcenie liniowe $\pi^* : (x_1, x_2, \ldots x_n) \to x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \ldots, x_{\pi(n)}$. Permutację nazywamy parzystą, gdy wyznacznik macierzy przekształcenia π^* jest dodatni; w przeciwnym razie — nieparzystą.

    a) Określ typ parzystości każdej z permutacji zbioru $\{1, 2, 3\}$.

    b) Określ typ parzystości transpozycji, tzn. permutacji zamieniającej miejscami dwa wybrane elementy.

    c) Uzasadnij, że złożenie dwu permutacji jest permutacją parzystą wtedy i tylko wtedy, gdy obie są tej samej parzystości.