ALGEBRA Z GEOMETRIĄ ANALITYCZNĄ

Lista zadań dla kursów mających ćwiczenia co dwa tygodnie. Zadania po symbolu potrójne karo omawiane są na ćwiczeniach rzadko, ale warto też poświęcić im nieco uwagi.

Przy okazji zachęcam do lektury mojej książki

Marek Zakrzewski

Markowe wykłady z matematyki

Algebra z geometrią, GIS 2015

W serii *Markowe wykłady z matematyki* omawiam najważniejsze **pojęcia** i **metody**, ale szczególny nacisk kładę na **konkretne**, **interesujące problemy**.

Wskazówki do ewentualnej lektury:

Lista 1	Wykłady 1-2
Lista 2	Wykład 3
Lista 3	Wykład 4
Lista 4	Wykłady 7.1-7,2, 8, 9.1-9.2
Lista 5	Wykłady 5, 10
Lista 6	fragmenty wykładów 11-13
Lista 7	Wykłady 16-17

M. Z.

Lista 1 - Liczby zespolone

1. Oblicz

   a) $(1+i)(2-i)$; b) $(3+2i)^2$; c) $(2+i)(2-i)$; d) $(3-i)/(1+i)$;
   e) $(1+i\sqrt{3})/(2+i\sqrt{3})$; f) $(2+i)^3$; g) $(\sqrt{3}-i)^3$; h) $(-\sqrt{2}+i\sqrt{3})^2$

2. Korzystając ze wzoru dwumianowego Newtona oblicz:

   a) $(1+2i)^3$; b) $(2-3i)^4)$; c) $(2+i)^5$; d) $(1-i)^6$; e) $(-1+i\sqrt{2})^4$.

3. Dla jakich liczb zespolonych zachodzi równość:

   a) $\operatorname{Re} z^2 = 0$; b) $\operatorname{Im} z < \operatorname{Re} z$; c) $\operatorname{Im} z^2 < 8$?

4. Przedstaw na płaszczyźnie zespolonej zbiór liczb z spełniających warunek:

   a) $|z-i| = 1$; b) $|z+1| = 2$; c) $|2z+4| > 6$; d) $|z+1| = |z-i|$
   e) $|z^2+1| = |z+i|$; f) $|z+i| + |z-i| = 2$; g) $|z| = z\overline{z}$; h) $z + \overline{z} = 2|z|$.

   Tam, gdzie to możliwe korzystaj z geometrycznej interpretacji różnicy modułu.

5. Korzystając ze wzoru de Moivre'a oblicz:

   a) $(1+i)^{33}$; b) $(1+i\sqrt{3})^{10}$; c) $(\sqrt{3}-i)^{100}$; d) $(2-i\sqrt{12})^{20}$ e) $(\sin 2\pi/5 - i\cos 2\pi/5))^5$.

6. Znajdź pierwiastki wskazanego stopnia i zaznacz je na płaszczyźnie zespolonej:

   a) $\sqrt[3]{-8}$; b) $\sqrt[2]{16i}$; c) $\sqrt[4]{-1}$; d) $\sqrt[8]{1}$; e) $\sqrt[3]{-\sqrt{3}+i}$; f) $\sqrt[6]{-1}$.

7. Znajdź pierwiastki kwadratowe z: a) $8+6i$; b) $15-8i$.

8. Sprawdź, że $1-i\sqrt{2}$ jest jednym z pierwiastków czwartego stopnia liczby $-7+4i\sqrt{2}$. Znajdź pozostałe.

9. Korzystając ze wzorów Newtona i de Moivre'a wyprowadź wzór wyrażający:

   a) $\sin 3\alpha$ w zależności od $\sin\alpha$; b) $\cos 5\alpha$ w zależności od $\cos\alpha$.

◊◊◊

10. Znajdź wszystkie pierwiastki trzeciego stopnia z jedynki nie korzystając z postaci trygonometrycznej.

11. Korzystając ze wzoru Newtona dla $(1+1)^n$ oraz $(1-1)^n$ wyprowadź wzór na sumę

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots$$

W analogiczny sposób wyprowadź wzór na sumę

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{4} + \binom{n}{8} + \dots$$

Lista 2 - Wielomiany

1. Znajdź iloraz i resztę z dzielenia $z^4 + z^2 + z + 1$ przez $z^2 - 1$.

2. Wielomian $w(z)$ daje przy dzieleniu przez $z^2 + i$ iloraz $z^2 - i$ oraz resztę $2z + 1$. Znajdź wielomian $w(z)$.

3. Nie wykonując dzielenia znajdź: a) resztę z dzielenia $z^{10} - z$ przez $z - 2$; b) resztę z dzielenia $z^{11} + z^{10} + 1$ przez $z^2 + 1$.

4. Rozwiąż równanie kwadratowe:

   a) $z^2 - 2z + 2 = 0$; b) $2z^2 + 2z + 1 = 0$; c) $z^2 - 8zi = 25$.

5. Rozwiąż równanie $z^4 - 4z^3 + 8z^2 - 8z + 4 = 0$ wiedząc, że jednym z jego pierwiastków jest $1 + i$.

6. Rozłóż na czynniki liniowe:

   a) $z^4 - 1$; b) $z^4 + 2z^2 + 1$; c) $z^4 - 8z$;
   d) $z^4 + z^2 + 1$; e) $z^6 - 1$; f) $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$.

7. Odgadnij pierwiastek i rozłóż na czynniki liniowe wielomian $x^3 - 4x^2 + 8$.

8. Rozwiąż równanie $2x^3 + x^2 + x = 1$.

9. Znajdź równanie rzeczywiste, którego rozwiązaniem są cztery wierzchołki kwadratu $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$ oraz $(-1, -1)$.

10. Rozłóż na rzeczywiste ułamki proste:

$$\text{a) } \frac{1}{x^3 - x}; \quad \text{b) } \frac{x}{x^3 + 1}; \quad \text{c) } \frac{x}{x^4 - 1}; \quad \text{d) } \frac{1}{x(x-2)^2}; \quad \text{e) } \frac{x^3}{x^2 - 1}; \quad \text{f) } \frac{x^4 - 1}{x^3 - 1}.$$

◊◊◊

11. Rozłóż wielomian $z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$ na nierozkładalne czynniki rzeczywiste.

12. Wykaż, że jeśli pierwiastkami równania czwartego stopnia o współczynikach rzeczywistych są cztery różne liczby, to tworzą one trapez bądź leżą na jednej prostej.

13. Rozwiąż równanie $x^3 + 3x = 5$ metodą Cardana. W tym celu podstaw $x = u - v$. Dobierz u oraz v tak, aby otrzymać układ równań $u^3 - v^3 = 5$, $uv = \ldots$.

Lista 3 - Geometria płaszczyzny

1. Znajdź równanie prostej przechodzącej przez punkty:

   a) $P = (0, 2)$, $Q = (-3, 0)$; b) $P = (-1, 2)$, $Q = (-1, 1)$; c) $P = (1, 3)$, $Q = (4, 3)$.

2. Prosta l opisana jest równaniem $y-2 = k(x-3)$. Znajdź równanie prostej: a) równoległej do l i przechodzącej przez punkt $(1, -2)$; b) prostopadłej do l przechodzącej przez początek układu; c) prostopadłej do l i przechodzącej przez punkt $(-3, 4)$.

3. Dla jakich parametrów wektory $\mathbf{u} = [a, b, 1]$ oraz $\mathbf{v} = [4, a, b]$
   a) równoległe; b) prostopadłe?

4. Niech $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$ będą promieniami wodzącymi punktów A, B. Wyraź za ich pomocą wektor wodzący punktu P dzielącego odcinek AB w stosunku $k : 1$ (tzn. $|AP| = k \cdot |PB|$).

5. Znajdź kąt pomiędzy przekątnymi równoległoboku rozpiętego przez wektory
   $\mathbf{u} = [2, 1, 0]$ oraz $\mathbf{v} = [-1, 3, 2]$.

6. Wiadomo, że $|\mathbf{u}| = 2$, $|\mathbf{v}| = 3$, $\mathbf{u} \circ \mathbf{v} = 1$. Korzystając z własności iloczynu skalarnego oblicz $(2\mathbf{u} + \mathbf{v}) \circ (\mathbf{u} - 2\mathbf{v})$.

7. Korzystając z iloczynu skalarnego uzasadnij, że równoległobok jest rombem wtedy i tylko wtedy, gdy jego przekątne są prostopadłe.

8. Wektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ oraz $\mathbf{d}$ są promieniami wodzącymi kolejnych wierzchołków czworokąta. Jaka zachodzi pomiędzy nimi zależność, jeżeli czworokąt jest: a) równoległobokiem;

   b) rombem; c) kwadratem?

9. Znajdź środek i promień okręgu $x^2 + 6x + y^2 + 2y = 0$.

10. Znajdź ogniska (lub ognisko i kierownicę) i naszkicuj:

    a) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$; b) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$; c) $\frac{y^2}{3} - \frac{x^2}{6} = 1$; d) $2y^2 - x^2 = 1$;
    e) $x + 1 = 4y^2$; f) $y^2 + 2y - 2x^2 = 3$; g) $(y + 2)^2 = x - 2$; h) $x^2 + 2x - 2y^2 + 4y = 0$.

11. Okrąg jednostkowy o środku w początku współrzędnych można zapisać za pomocą liczb zespolonych równaniem $|z| = 1$. Zapisz za pomocą liczb zespolonych:

    a) elipsę o ogniskach $F_1 = (-2, 1)$, $F_2 = (2, 1)$ oraz osi $2a = 6$;

    b) hiperbolę o tych ogniskach i wierzchołkach $(-1, 1)$ oraz $(1, 1)$.

♢♢♢

12. Wiadomo, że dwie różne stożkowe przecinają się co najwyżej w czterech punktach. Wykaż, że sześć punktów elipsy nie będącej okręgiem nie może tworzyć sześciokąta foremnego. A co z innymi wielokątami foremnymi?

13. Jak wygląda zbiór punktów $P = (x, y)$ spełniających równanie $x^4 + 1 = y^4 + 2x^2$?

Lista 4 - Macierze i wyznaczniki

1. Dla macierzy A, B, C, D oblicz wszystkie możliwe iloczyny (w tym kwadraty):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

2. Zapisz poniższy układ za pomocą jednego równania macierzowego wykorzystującego: a) macierze stopnia 4; b) wyłącznie macierze 2×2:

$$\begin{cases} x + 2y = 5, \\ 3x + y = 1, \\ z + 2t = 7, \\ 3z + t = 8. \end{cases}$$

3. Pokaż, że dla macierzy A, B zachodzi wzór $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $AB = BA$. Przy jakich założeniach $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$? Czy prawdą jest, że $(A+I)(A-I) = A^2 - I$? Czy $A^3 - I = (A-I)(A^2+A+I)$?

4. Wyraź macierz X za pomocą macierzy A, B, C: a) $AXB = C$; b) $AX = I + BX$.

5. Oblicz wyznaczniki

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{b)} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{c)} \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{vmatrix}; \quad \text{d)} \begin{vmatrix} 1 & 1+i & 2-i \\ 1-i & 2 & 3+2i \\ 2+i & 3-2i & 3 \end{vmatrix}.$$

6. Korzystając z podstawowych własności wyznaczników oblicz wyznaczniki poniższych macierzy. Które z tych macierzy są nieosobliwe?

$$\text{a)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}; \quad \text{b)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}; \quad \text{c)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{bmatrix}; \quad \text{d)} \begin{bmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 5^2 & 6^2 & 7^2 & 8^2 \\ 9^2 & 10^2 & 11^2 & 12^2 \\ 13^2 & 14^2 & 15^2 & 16^2 \end{bmatrix}.$$

7. Oblicz wyznaczniki wykorzystując odpowiednie własności i rozwinięcie Laplace'a:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}; \quad \text{b)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{c)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}; \quad \text{d)} \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

8. Oblicz macierze odwrotne na dwa sposoby: metodą macierzy dołączonej (tzn. za pomocą odpowiednich operacji elementarnych na wierszach) oraz za pomocą wyznaczników. Sprawdź wynik wykonując odpowiednie mnożenie.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

9. Jaką wartość może mieć wyznacznik macierzy A, jeżeli a) $A^3 = A$; b) $A^3 = 4A$.

◊◊◊

10. Sprawdź, że równanie

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1$$

przedstawia równanie okręgu. Zapisz w podobnej postaci, za pomocą macierzy symetrycznych, równania:

a) $x^2 - y^2 = 1$; b) $x^2 + 2y^2 = 1$; c) $x^2 + 4xy + y^2 = 5$; d) $xy = 2$.

Uwaga: Macierze $[a]$ są utożsamiane tu z liczbą a.

11. Wykaż, że każda macierz kwadratowa jest sumą macierzy symetrycznej i antysymetrycznej.

12. Uzasadnij, że dla dowolnych macierzy kwadratowych tego samego stopnia $AB+BA$ jest macierzą symetryczną. Co można powiedzieć o macierzy $AB - BA$?

13. Jak zmieni się macierz kwadratowa stopnia 3, gdy pomnożymy ją prawostronnie przez macierz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Spróbuj zgadywać wynik zanim przystąpisz do rachunków.

14. Oblicz wyznaczniki (wg listy dr.M. Gewerta):

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 6 & 5 \end{vmatrix}; \qquad \text{b)} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}; \qquad \text{c)} \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 5 & 3 & \cdot & 0 \\ 0 & 2 & 5 & \cdot & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 5 \end{vmatrix}_{n\times n}.$$

Lista 5 - Geometria przestrzeni

1. Znajdź równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt $P = (1, 2, -3)$: a) prostopadłej do prostej $x = t$, $y = t + 2$, $z = 3t - 1$; b) zawierającej oś Oz.

2. W jakich punktach płaszczyzna $x + 3y - 2z = 6$ przecina osie układu?

3. Znajdź równanie parametryczne prostej zadanej układem $x + y + 2z = 4$, $3x - y + z = 3$. Znajdź odległość tej prostej od początku układu.

4. Znajdź odległość pomiędzy płaszczyzną $x + 2y + 3z = 6$ a:

   a) początkiem układu; b) płaszczyzną $2x + 4y + 6z = 6$.

5. Znajdź kąt pomiędzy:

   a) płaszczyznami $x + 2y + z = 4$ oraz $3x - y + z = 0$;

   b) płaszczyzną $x + 4y - z = 1$ a prostą $x = t + 1$, $y = 2t$, $z = -t + 1$.

6. Znajdź kąt pomiędzy przekątnymi AF i AH ścian sześcianu $ABCDEFGH$:

   a) korzystając z iloczynu skalarnego; b) bez użycia iloczynu skalarnego.

7. Dane są punkty $A = [1, 1, 0]$, $B = [2, 3, 1]$, $C = [4, 1, 5]$. Znajdź:

   a) pole równoległoboku rozpiętego na wektorach $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$;

   b) wysokość (tzn. jej długość) trójkąta ABC poprowadzoną z wierzchołka A.

8. Oblicz iloczyny wektorowe:

   a) $[1, 2, 3] \times [2, 3, 4]$; b) $[2, 3, 4] \times [2, 4, 6]$; c) $[1, 2, 3] \times [2, 4, 6]$; d) $[1, 2, 3] \times [3, 2, 1]$.

9. Znajdź wszystkie wersory prostopadłe do obu wektorów $[1, 2, 3]$ oraz $[2, 5, 1]$ za pomocą: a) iloczynu skalarnego; b) iloczynu wektorowego.

10. Znajdź równanie parametryczne prostej o równaniu krawędziowym

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1, \\ -x + y + 2z = 3. \end{cases}$$

11. Oblicz iloczyny mieszane trójki wektorów:

    a) $[0, 1, 2]$, $[1, 2, 3]$, $[2, 3, 4]$; b) $[0, 1, 2]$, $[1, 2, 3]$, $[1, 3, 5]$; c) $[1, 1, 0]$, $[1, 0, 1]$, $[0, 1, 1]$.

12. Dane są punkty $A = [0, 0, 0]$, $B = [1, 1, 0]$, $C = [1, 1, 1]$ oraz $D = [0, 1, 1]$. Znajdź:

    a) objętość równoległościanu rozpiętego na wektorach $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$;

    b) objętość czworościanu $ABCD$.

13. Pokaż, że jeśli punkty $P_i = (x_i, y_i, z_i)$, gdzie $i = 1, 2, 3$ nie leżą na jednej prostej, to

$$\det \begin{bmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix} = 0$$

    jest równaniem płaszczyzny $P_1P_2P_3$. Co przedstawia to równanie, gdy te punkty są współliniowe?

$\diamondsuit \quad \diamondsuit \quad \diamondsuit$

14. Znajdź odległość pomiędzy prostymi $x = t + 1$, $y = 2t + 1$, $z = 3t + 2$ oraz $x = -t + 1$, $y = 2t - 1$, $z = 4t$.

15. Jaką krzywą przedstawia linia $x = (t + 1)^2$, $y = t^2 + 2t$, $z = (t + 3)(t - 1)$?

16. Korzystając z wektorów uzasadnij, że proste łączące wierzchołki czworościanu ze środkami ciężkości przeciwległych ścian przecinają się w jednym punkcie.

Lista 6 - Układy równań i przestrzenie liniowe. Liniowa niezależność, baza i wymiar

1. Rozwiąż układy równań korzystając z metody eliminacji:

a) $\begin{cases} x + 2y - 3z = 1, \\ 2x - 3y + z = 2, \\ 4x + 2y - 3z = 7; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y + 2z = 7, \\ x + 2y + z = 8, \\ 2x + y + z = 9, \\ x + y + z = 7; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y - z + 3t = 4, \\ 2x - 3y - 2z = 2, \\ x + 6y - z + 9t = 10; \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x + 3y + z + 2t = 8, \\ 3x + y + 2z + t = 7, \\ 4x - y + 3z = 6. \end{cases}$

2. Rozwiąż za pomocą wzorów Cramera układ równań

a) $\begin{cases} 2x - y + 2z = 4, \\ 5x + y + z = 6, \\ -x + 2y + 2z = 0; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 2y + 3z = 3, \\ 3x + y - 2z = 5, \\ x - y + 4z = 5. \end{cases}$

3. Zbadaj, czy jest przestrzenią liniową nad R:

a) zbiór rozwiązań równania $x + y + z = 0$;

b) zbiór rozwiązań równania $x + 2y = 1$;

c) zbiór rozwiązań układu $x + y + z = 0$, $x - 2y + 3z = 0$;

4. Zbadaj liniową niezależność:

a) wektorów $[1, 2, 3]$, $[2, 3, 5]$ oraz $[3, 5, 7]$ nad ciałem R;

b) wektorów $[[1, 1, 2]$, $[1, 2, 1]$ oraz $[2, 7, -1]$ nad ciałem R.

5. Znajdź bazę i wymiar poniższych przestrzeni liniowych nad R:

a) $\{(t, x, y, z) \in R^4 : t + x + y + 2z = 0\}$;

b) $\{(t, x, y, z) \in R^4 : t + x = 0, 2t + y - z = 0\}$.

Ile liczb rzeczywistych potrzeba, aby określić położenie punktu w obu przestrzeniach?

6. Znajdź rząd macierzy:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 2 & 5 & 2 & 5 \\ 4 & 9 & 8 & 13 & 12 & 17 \\ -1 & -5 & 9 & 5 & 19 & 15 \end{bmatrix}$

Wskaż bazę przestrzeni wierszy, bazę przestrzeni kolumn i niezerowy minor maksymalnego stopnia.

7. Znajdź wymiar przestrzeni rozwiązań układu $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, gdy macierz A ma 6 wierszy, 5 kolumn i rząd 3. Czy wszystkie informacje są istotne?

8. Przy jakich założeniach o macierzy A równanie $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ przedstawia: a) płaszczyznę w R^3; b) prostą w R^3; c) płaszczyznę w R^4?

9. Rozważmy równanie

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & b & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{bmatrix}.$$

Znajdź wymiar przestrzeni rozwiązań w zależności od a, b.

10. Określ ilość rozwiązań w zależności od parametru p

$$\begin{cases} px + 2y + z = 1, \\ x - py + z = 2, \\ x + 2y + z = p. \end{cases}$$

11. Znajdź bazę i wymiar poniższych przestrzeni liniowych nad R:

    a) funkcji liniowych o współczynnikach rzeczywistych;

    b) wielomianów $w(x)$ stopnia co najwyżej 4 takich, że $w(-x) = w(x)$;

    c) rzeczywistych macierzy kwadratowych stopnia n;

    d) rzeczywistych symetrycznych macierzy kwadratowych stopnia n;

    e) zespolonych macierzy $m \times n$.

$\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit$

12. W przestrzeni R^3 dwie płaszczyzny nie mogą stykać się dokładnie w jednym punkcie. Czy jest to możliwe w przestrzeni R^4?

13. Znajdź wymiar przestrzeni generowanej nad ciałem R przez funkcje 1, $\sin x$, $\cos x$, $\sin^2 x$, $\cos^2 x$.

14. W przestrzeni R nad ciałem Q wskaż nieskończony zbiór liniowo niezależny.

15. Znajdź rząd macierzy

$$\begin{bmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ f_1' & f_2' & f_3' \\ f_1'' & f_2'' & f_3'' \end{bmatrix}$$

dla funkcji: a) $f_1 = e^x$, $f_2 = e^{2x}$, $f_3 = e^{3x}$; b) $f_1 = 1$, $f_2 = \sin^2 x$, $f_3 = \cos^2 x$.

Lista 7 - Przekształcenia liniowe i wektory własne

1. Sprawdź, czy jest przekształceniem liniowym:
   a) $L(x,y) = (x+y, x)$; b) $L(x,y,z) = x + 2y$; c) $L(x,y) = (x, y+1)$; d) $L(x,y) = x^2$.

2. Znajdź macierz przekształcenia $L(x,y,z) = (x, y+z)$ w bazach standardowych.

3. Znajdź macierz przekształcenia $L(x,y,z) = (x+y, y+z, z+x)$: a) w bazach standardowych; b) w bazach $[1,0,0]$, $[1,1,0]$, $[1,1,1]$ oraz $[1,1,0]$, $[1,0,1]$, $[0,1,1]$.

4. Znajdź macierz przekształcenia $L : R^3 \to R^3$ w bazach standardowych: a) odbicia symetrycznego względem płaszczyzny Oxy; b) symetrii środkowej względem początku układu; c) obrotu o kąt α wokół osi Oz.

5. Znajdź jądro i obraz przekształcenia:
   a) $L(x,y,z) = (x,y,0)$; b) $L(x,y,z) = (x+y, x-y, 2z)$; c) $L(x,y,z) = (x-y, y-z, z-x)$.

6. Znajdź wielomian charakterystyczny, wektory i wartości własne macierzy:
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

7. Znajdź wielomian charakterystyczny, wartości i wektory własne przekształcenia liniowego $L(x,y) = (x+3y, 4x+2y)$.

8. Korzystając wyłącznie z intuicji geometrycznych znajdź wektory i wartości własne:
   a) symetrii zwierciadlanej względem płaszczyzny Oyz; b) obrotu o kąt $180°$ wokół osi Oz; c) symetrii środkowej względem początku układu.

◊◊◊

9. Sprawdź, czy jest przekształceniem liniowym:
   a) $L(f) = f'$; b) $L(f) = f + 1$; c) $L(f) = f(1)$; d) $L(f) = |f|$; e) $L(f) = \int_0^x f(t)dt$.

10. Rozważmy przestrzeń macierzy kwadratowych ustalonego stopnia n. Czy jest przekształceniem liniowym:
    a) przyporządkowanie $A \to \det A$;
    b) przyporządkowanie $A \to \operatorname{tr} A$, gdzie $\operatorname{tr} A = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$ (ślad macierzy A)?

11. Dla przekształcenia liniowego $L : V \to V$ określonego na przestrzeni skończenie wymiarowej V zachodzi równoważność:
$$L \text{ jest różnowartościowe} \Leftrightarrow L \text{ jest „na”}.$$
    Czy równoważność taka zachodzi dla przestrzeni nieskończeniewymiarowych?

12. Korzystając z diagonalizacji macierzy A wyprowadź wzór na A^n, gdzie
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}.$$

13. Każdej permutacji $\pi : \{1,2,\ldots,n\} \to \{1,2,\ldots,n\}$ odpowiada przekształcenie liniowe $\pi^* : (x_1, x_2, \ldots x_n) \to x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \ldots, x_{\pi(n)}$. Permutację nazywamy parzystą, gdy wyznacznik macierzy przekształcenia π^* jest dodatni; w przeciwnym razie — nieparzystą.

    a) Określ typ parzystości każdej z permutacji zbioru $\{1,2,3\}$.

    b) Określ typ parzystości transpozycji, tzn. permutacji zamieniającej miejscami dwa wybrane elementy.

    c) Uzasadnij, że złożenie dwu permutacji jest permutacją parzystą wtedy i tylko wtedy, gdy obie są tej samej parzystości.