ANALIZA MATEMATYCZNA I

Lista zadań dla kursów mających ćwiczenia co tydzień. Choć zadania po symbolu potrójne karo nie są typowe, warto też poświęcić im nieco uwagi. Lista nie zawiera odpowiedzi, ale poprawność rozwiązania można niemal zawsze sprawdzić za pomocą programu Wolfram Alpha® lub innego pokrewnego.

Przy okazji zachęcam do lektury mojej książki

Marek Zakrzewski

Markowe wykłady z matematyki

Analiza, GIS 2013

W serii *Markowe wykłady z matematyki* omawiam najważniejsze **pojęcia** i **metody**, ale szczególny nacisk kładę na **konkretne**, **interesujące problemy**.

M. Z.

Lista 1 - Funkcje elementarne I: Funkcja potęgowa, wykładnicza i logarytm

1. Naszkicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji:

   a) $y = x$, $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$;   b) $y = \dfrac{1}{x}$, $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

2. Naszkicuj wykres funkcji $f \circ f$, $f \circ g$, $g \circ f$, $g \circ g$ dla funkcji:

   a) $f)x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$;   b) $f(x) = x - 1$, $g(x) = x + 1$;

   c) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = x$;   d) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$, $g(x) = \dfrac{1}{x+1}$.

3. Naszkicuj wykres funkcji $y = 2^x$. Jakiej funkcji odpowiada wykres otrzymany z niego przez: a) symetrię osiowa względem osi Ox; b) symetrię osiowa względem osi Oy; c) symetrię środkowa względem początku układu; d) symetrię osiowa względem prostej $y = 1$; e) symetrię osiową względem prostej $x = -1$?

4. Dla funkcji $f(x) = \log_2 x$ naszkicuj wykresy funkcji:

   a) $y = f(x+1)$;   b) $y = |f(x)|$;   c) $y = f(|x|)$;   d) $y = -f(x)$;   e) $y = f(x^2)$.

   Czy pośród wskazanych wykresów jest wykres funkcji $y = \log_{\frac{1}{2}} x$?

5. Sformułuj twierdzenie o zamianie podstaw logarytmu. Wykaż, że przy odpowiednich założeniach zachodzi tożsamość $\log_a b \cdot \log_b a = 1$.

6. Podaj wartości poniższych wyrażeń w możliwie najprostszej postaci:

   a) $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$;   b) $(\sqrt{2})^3 \cdot (\sqrt[4]{2})^2$;   c) $\left(\sqrt{8}\right)^{\sqrt{2}} : \left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{8}}$;

   d) $\log_{\sqrt{3}} 3 + \log_2 \sqrt{2}$;   e) $\log_2 3 \cdot \log_3 4$;   f) $\log_{\sqrt{10}} \sqrt{2}$.

7. Czasem trudno odkryć zależność pomiędzy zmiennymi wielkościami x, y, ale łatwo pomiędzy ich logarytmami. Wyraź y jako funkcję zmiennej x, jeżeli $\log y = \dfrac{3}{2} \log x$.

8. Znajdź funkcję odwrotną do funkcji:

   a) $y = 2^{x-1}$;   b) $y = 10^{2x}$;   c) $y = x^2$, $x \leq 0$;   d) $y = x^2 + 2x$, $x \geq -1$.

   Pamiętaj o dziedzinie!

9. Jakiej funkcji odpowiada wykres otrzymamy z wykresu $y = 1 + \log x$ przez symetrię osiową względem prostej $y = x$?

♢ ♢ ♢

10. Badania pokazują, że w dużych zbiorach danych złożonych z przypadkowych liczb, liczby zaczynające się cyfrą k stanowią około $\log\left(1 + \frac{1}{k}\right)$ wszystkich danych.

    a) Oszacuj, jaka część danych zaczyna się cyfrą 1, jaka cyfrą 2.

    b) Sprawdź, że

$$\log\left(1 + \frac{1}{1}\right) + \log\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ldots + \log\left(1 + \frac{1}{9}\right) = 1.$$

11. Za pomocą odpowiedniego logarytmu podaj wzór na liczbę cyfr liczby n. Ile cyfr ma w zapisie dziesiętnym liczba 2^{1000}?

Lista 2 - Funkcje elementarne II: Funkcje trygonometryczne i cyklometryczne

1. Naszkicuj wykres funkcji:

   a) $y = \sin 2x$; b) $y = \cos(x + \pi/4)$; c) $y = |\sin x| + \sin x$; d) $y = \sin x + \sqrt{3}\cos x$.

2. Określ typ parzystości (parzysta, nieparzysta, ani taka ani taka) funkcji:

   a) $y = \sin x + \sin 3x$; b) $y = \sin x \cos x$; c) $y = \cos x + \cos^2 x + \cos^3 x$;
   d) $y = \sin x + \sin^2 x$; e) $y = x^k \cos x$; f) $y = \sin(x + \pi/4) + \cos(x + \pi/4)$.

3. Wyraź:

   a) $\cos^2 x$ oraz $\sin^2 x$ za pomocą $\cos 2x$;

   b) $\cos^4 x$ za pomocą $\cos 2x$ i $\cos 4x$:

   c) $\cos^3 x$ za pomocą $\cos x$ i $\cos 3x$.

4. Wykaż tożsamości:

   a) $1 + \text{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$; b) $cos^3 x + \sin^3 x = (\cos x + \sin x)\left(1 - \dfrac{\sin 2x}{2}\right)$;

   c) $\dfrac{\sin 3x + \sin x}{\sin 2x + \sin 2x} = \cos x$; d) $\dfrac{\sin 2x}{\cos 2x + 1} + \dfrac{\sin 2x}{\cos 2x - 1} = \text{tg} x - \text{ctg} x$.

5. Oblicz wartości czterech podstawowych funkcji trygonometrycznych kąta $\sin 15°$.

6. Oblicz wartości funkcji cyklometrycznych:

   a) $\text{arctg}\, 1$; b) $\arcsin(-1/2)$; c) $\arccos(-1)$; d) $\arcsin(\sqrt{2}/2)$;
   e) $\text{arctg}\,(-\sqrt{3})$; f) $\arccos(\sqrt{3}/2)$; g) $\text{arcctg}(-\sqrt{3})$; h) $\arcsin(-\sqrt{3}/2)$.

7. Krzywą, którą można otrzymać przesuwając i ewentualnie obracając wykres funkcji $y = a\sin(bx + c)$ dla ustalonych parametrów a, b, c, nazywamy **sinusoidą**. Wykaż, że każda z poniższych krzywych jest sinusoidą:

   a) $y = \cos x$; b) $y = \sin^2 x$; c) $y = \sin x \cos x$;
   d) $y = \sin x + \cos x$; e) $y = (\sin x + \cos x)^2$; f) $\sin^4 x + \cos^4 x$.

$\diamondsuit \quad \diamondsuit \quad \diamondsuit$

8. Ile różnych wartości przyjmuje wyrażenie $\sin 1° + \sin 2° + \sin 3° + \ldots + \sin k°$, gdy k przyjmuje wartości 0, 1, 2, ...?

9. Oblicz:
$$\sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{6\pi}{7} + \sin\frac{8\pi}{7} + \sin\frac{10\pi}{7} + \sin\frac{12\pi}{7}.$$

10. Udowodnij, że dla dodatnich x zachodzi równość $\text{arctg}\, x + \text{arctg}(1/x) = \frac{\pi}{2}$. Jak wygląda analogiczna równość dla ujemnych x?

11. Naszkicuj wykresy funkcji:

    a) $y = \text{tg}(\text{arctg}\, x)$; b) $y = \text{arctg}(\text{tg}\, x)$ c)* $y = \cos(\arcsin x)$.

12. * Jednym z pierwiastków równania $4x^3 - 3x = \frac{1}{2}$ jest $\cos 20°$. Znajdź dwa pozostałe.

Lista 3 - Granica ciągu

1. O każdym z poniższych ciągów rozstrzygnij, czy jest ograniczony (ograniczony z góry, z dołu) i czy jest monotoniczny. Jeżeli ciąg jest ograniczony (z góry, z dołu) wskaż najmniejsze ograniczenie górne (największe dolne).

   a) $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$; b) $b_n = (-1)^{n+1} + \frac{(-1)^n}{n}$; c) $c_n = \frac{1}{3n+1} - \frac{1}{2n+5}$;

   d) $d_n = 3^n + (-2)^n$; e) $e_n = n^2 + (-1)^n n$; f) $f_n = \frac{1+2+\ldots+n}{n!}$.

2. Zapisz za pomocą kwantyfikatorów, innych symboli logicznych i arytmetycznych poniższe zdania oraz ich zaprzeczenia:

   a) ciąg a_n jest ograniczony z góry przez liczbę 7;

   b) ciąg a_n jest ograniczony przez liczbę 7;

   c) ciąg a_n nie jest ograniczony przez liczbę 7;

   d) ciąg a_n ma dowolnie dalekie wyrazy większe od 7;

   e) ciąg a_n jest rosnący;

   f) ciąg a_n jest monotoniczny;

   g) ciąg a_n nie jest ani rosnący, ani malejący.

3. Oblicz granice ciągów:

   a) $a_n = \frac{n^3+n+1}{(n-1)n(n+1)}$; b) $b_n = \frac{100n^2+1}{n^3-n+1}$; c) $c_n = \frac{101^n + 102^n}{103^n}$

   d) $d_n = \sqrt{n^2+1} - n$; e) $e_n = \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n}$; f)* $f_n = \sqrt[3]{n^3+n} - \sqrt[3]{n^3-n}$. .

4. Znajdź granice niewłaściwe, o ile istnieją.

   a) $a_n = (n^2+1)/(1-n)$; b) $b_n = 1000n^2 - n^3$; c) $c_n = 3^n - 2^n$; d) $d_n = 3^n - (-2)^n$.

5. Jeżeli dla dodatnich funkcji f, g

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = a,$$

   gdzie $0 < a < \infty$, to mówimy, że f, g są tego samego rzędu; jeżeli $a = 1$ — mówimy, że są asymptotycznie równe.

   a) Pokaż, że $1 + 2 + \ldots + n$ jest rzędu n^2.

   b) Dla jakiego a $\binom{n}{k}$ jest asymptotycznie równe an^k?

6. Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach oblicz granice ciągów:

   a) $a_n = \frac{\sin n}{n}$; b) $b_n = \frac{n+\cos n}{n+\sin n}$; c) $c_n = \sqrt[n]{2^n+3^n}$; d) $d_n = \sqrt[n]{1+2+\ldots+n}$;

7. Naszkicuj wykres funkcji

$$\text{a) } f(x) = \lim_{n\to\infty} x^n; \quad \text{b) } f(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + x + x^2 + \ldots x^n\right).$$

   Uważaj na dziedzinę!

8. Oblicz granicę ciągu:

   a) $a_n = \frac{1+2+\ldots+n}{1+2+\ldots+2n}$; b) $b_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \ldots + \frac{n}{n^2}$; c) $c_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{3^n}$.

9. * Oblicz granice ciągu:

$$a_n = \left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^4}\right)\dots\left(1+\frac{1}{2^{2^n}}\right).$$

Wskaż najwcześniejszy wyraz różniący się od granicy o mniej niż $1/1\,000\,000$.

10. Wiadomo, że ciąg ograniczony i monotoniczny jest zbieżny. Czy wynika stąd, że:

a) ciąg rozbieżny nie jest ani ograniczony, ani monotoniczny;

b) ciąg rozbieżny nie jest ograniczony lub nie jest monotoniczny;

c) ciąg ograniczony niemonotoniczny nie jest zbieżny;

d) ciąg zbieżny jest ograniczony i monotoniczny?

11. Oblicz granice ciągu:

a) $a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n}$; b) $b_n = \left(\frac{n+2}{n}\right)^{n}$; c) $a_n = \left(\frac{2n+1}{2n}\right)^{4n+1}$; d) $d_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}$;
e) $e_n = \left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{3n}$; f) $f_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$; g) $g_n = \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{n}$; h) $h_n = \left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)^{n}$.

12. Niech (a_n), $n=1, n=2, \dots$, będzie pewnym ciągiem nieskończonym. Zapisz za pomocą kwantyfikatorów, symboli arytmetycznych, modułu itp. poniższe zdania odnoszące się do tego ciągu:

a) każdy jego wyraz jest większy od 1;

b) istnieją wyrazy ciągu różniące się przynajmniej o 2;

c) wszystkie wyrazy powyżej setnego różnią sie od siebie o mniej niż ε;

d) prawie wszystkie jego wyrazy różnią sie od liczby 1 o mniej niż ε;

e) nieskończenie wiele jego wyrazów różni się od liczby 1 o mniej niż ε;

f) ciąg ten jest zbieżny do liczby 2;

g) ciąg ten jest zbieżny.

Zapisz negację zdań d)-g).

♢ ♢ ♢

13. Niech P_n oznacza pole n-kąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu 1, L_n obwód tego wielokąta. Korzystając z tego, że okrąg jest geometryczna granica wpisanych weń wielokątów foremnych znajdź granice obu ciągów. Wywnioskuj stąd granicę ciągu $a_n = n\sin(2\pi/n)$.

14. Jakie jest prawdopodobieństwo, że pośród 183 osób przynajmniej jedna obchodzi urodziny w tym samym dniu, co Ty? Rachunki możesz wykonać w pamięci.

15. Rozważmy ciąg $a_0 = 1$,

$$a_{n+1} = \frac{a_n + \frac{2}{a_n}}{2}.$$

a) Wiedząc, że ciąg ten jest zbieżny, znajdź jego granicę. Oblicz kilka początkowych wyrazów i porównaj z wynikiem dokładnym.

b) Podaj analogiczny ciąg o granicy: a) $\sqrt{3}$; b) $\sqrt[3]{2}$.

16. Udowodnij, że $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Lista 4 - Granica funkcji i asymptoty

1. Oblicz granice funkcji:

   a) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{x+2}$; b) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-x}{x+1}$; c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2-x-2}$; d) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}$;

   e) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-9}{\sqrt{x}-3}$; f) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$; g) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2^x+1}{2^x+2}$; h) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}$;

   i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{2x}$; j) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}x}$; k) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$; l) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2^x+2^{-x}}{2^x+x}$.

2. Znajdź obie granice jednostronne (właściwe bądź niewłaściwe) we wskazanym punkcie:

   a) $y=\dfrac{x-1}{|x-1|}$ w punkcie 1; b) $y=\dfrac{\operatorname{sgn}x}{x}$ w punkcie 0; c) $y=\dfrac{\lceil x\rceil}{\lfloor x\rfloor}$ w punkcie 0.

3. Znajdź granice funkcji:

   a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-1}{x}$; c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}$: d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{e^{2x}-1}$; e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-1}{2^x-1}$;

   f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\sin 2x}$; g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$; h) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{e^x-1}$; i) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{\cos x}{\pi-2x}$; j) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x+x^2}$.

4. Znajdź asymptoty funkcji:

   a) $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$; b) $y=\dfrac{x^3+8}{(x^2-4)^2}$; c) $y=\dfrac{x^2}{x^2+x-6}$; d) $y=\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$.

5. Niech $S(h)$ oznacza powierzchnię całkowitą stożka o ustalonej podstawie r i wysokości h. Znajdź granicę $S(h)$ przy h dążącym do zera za pomocą:

   a) rozumowania geometrycznego; b) obliczeń.

6. Zapisz za pomocą kwantyfikatorów itd. zdanie:

   a) liczba 1 jest granicą funkcji $f(x)$ przy x dążącym do 5;

   b) liczba 2 jest granica funkcji $f(x)$ przy x dążącym do $-\infty$;

   c) funkcja $f(x)$ ma w punkcie $x=2$ granicę prawostronną 7;

   d) funkcja $f(x)$ ma w punkcie $x=3$ granicę niewłaściwa ∞.

♢ ♢ ♢

7. Obliczając odpowiednią granicę pokaż, że dla $a>0$

$$\sqrt{a^2+r}\approx a+\frac{r}{2a}.$$

   Korzystając z tego wzoru pokaż, że: a) $\sqrt{10}\approx 19/6$; b) $\sqrt{15}\approx 31/8$; c) $\sqrt{2}\approx 99/70$.

8. Przy stałym tempie wzrostu $p\%$ przez okres podwojenia rozumiemy czas, po jakim dana wielkość się podwaja.

   a) Znajdź okres podwojenia odpowiadający przyrostowi $p\%$.

   b) Uzasadnij, że dla małych p okres ten wyraża się przybliżonym wzorem $70/p$.

   c) Oszacuj średni przyrost naturalny w ciągu ostatnich 2 000 lat (przyrost od ok. 170 mln. do ok. 7,5 miliarda).

Lista 5 - Ciągłość

1. Naszkicuj wykresy funkcji:

   a) $y = \operatorname{sgn} x$ oraz $y = x \operatorname{sgn} x$; b) $y = \lfloor x \rfloor$ oraz $y = \lceil x \rceil$; c) $y = x - \lfloor x \rfloor$.

   Wskaż punkty nieciągłości każdej z tych funkcji.

2. Wskaż punkty nieciągłości i określ ich rodzaj:

$$\text{a) } y = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1}, & \text{gdy } x \neq 1, \\ 0 & \text{w p.p.}; \end{cases} \qquad \text{b) } y = \begin{cases} \cos\dfrac{1}{x} & \text{gdy } x > 0, \\ 0 & x < 0; \end{cases} \qquad \text{c) } y = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1}, & \text{gdy } x \neq 1, \\ 2 & \text{w p.p.}; \end{cases}$$

3. Korzystając z twierdzenie Bolzana o wartościach pośrednich dla funkcji ciągłych uzasadnij, że równanie:

   a) $x^5 + x + 1 = 0$ ma dokładnie jeden pierwiastek;

   b) $e^x = 1 + x + x^2$ ma dodatni pierwiastek;

   c) $\ln x + \ln(1 + x) = 2$ ma dokładnie jeden pierwiastek.

4. Za pomocą połowienia przedziału znajdź przybliżoną wartość jedynego pierwiastka równania: $x^3 + x = 3$.

5. Znajdź zbiór wartości funkcji $f(x) = e^x + x$. Wskaż, gdzie w uzasadnieniu odpowiedzi korzystasz z twierdzenia Bolzana.

6. Gdzie w poniższych rachunkach korzystamy z ciągłości? Jakiej funkcji i w jakim punkcie?

$$\lim_{n\to\infty} n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \ln \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \ln e = 1.$$

7. Czy funkcję $y = \sin(1/x)$ można dookreślić w punkcie zero tak, aby była ciągła na całej prostej? A funkcję $y = x \sin(1/x)$?

8. Korzystając z twierdzenia Bolzana wykaż, że każdy wielomian nieparzystego stopnia ma przynajmniej jeden pierwiastek.

◊ ◊ ◊

9. Za pomocą funkcji sufit lub podłoga określ funkcję, która będzie ciągła we wszystkich punktach z wyjątkiem punktów o współrzędnych będących:

   a) liczbami całkowitymi parzystymi;

   b) liczbami całkowitymi nieparzystymi;

   c) liczbami parzystymi różnymi od zera.

10. Zbadaj, w jakich punktach jest ciągła funkcja

$$\text{a) } y = \begin{cases} x, & \text{gdy } x \text{ wymierna}; \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}$$

Lista 6 - Pojęcie pochodnej i równanie stycznej

1. Korzystając z definicji oblicz pochodne: a) $y = \dfrac{1}{x+1}$; b) $y = \sqrt{x}$; c) $y = e^{-x}$.

2. Korzystając ze wzoru na pochodną funkcji potęgowej oblicz pochodne funkcji:

   a) $y = x(x-2)^2$; b) $y = \dfrac{1}{x^2}$; c) $y = \sqrt{x}$; d) $y = x\sqrt{x}$; e) $y = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x - \frac{1}{x}\right)$.

3. Oblicz: a) $f'(1)$ dla funkcji $y = (x + \sqrt{x})^3$; b) $f'(1)$ dla funkcji $y = \dfrac{x+\sqrt{x}}{x^2}$.

4. Znajdź równanie stycznej do wykresu funkcji:

   a) $y = e^x$ w punkcie $(0, f(0))$; b) $y = \ln x$ w punkcie $(e, f(e))$.

5. Znajdź kąt pomiędzy styczną do wykresu funkcji $y = 2 - x^2$ poprowadzonej w punkcie $(1,1)$ a dodatnią półosią osi Ox. Analogicznie dla stycznej w punkcie $(-1,1)$.

6. Jaki związek zachodzi pomiędzy $f'(1)$ a $f'(-1)$ dla funkcji: a) parzystej; b) nieparzystej?

7. Które z poniższych zdań są prawdziwe:

   A. Każda funkcja ciągła jest różniczkowalna.

   B. Każda funkcja różniczkowalna jest ciągła.

   C. Jeżeli funkcja nie jest ciągła, to nie jest różniczkowalna.

   D. Jeżeli funkcja nie jest różniczkowalna, to nie jest ciągła.

8. Oblicz pochodne niewłaściwe w punkcie x_0 funkcji:

   a) $y = \sqrt{|x-2|}$, $x_0 = 2$: b) $y = \sqrt{1-x^2}$, $x_0 = 1$; c) $y = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 0$.

   Jaką informację o wykresie odpowiedniej funkcji możesz stąd wywnioskować?

9. Wskaż punkty, w których funkcja nie jest różniczkowalna (o ile takie istnieją). W punktach nieróżniczkowalności oblicz wartości obu pochodnych jednostronnych.

   a) $y = |x+2|$; b) $y = |x^2 + x|$ $y = |x^3 + x^2|$; d) $y = x|x|$.

10. Wykaż, że jeśli funkcja różniczkowalna f spełnia warunki $f(a+b) = f(a)f(b)$ oraz $f'(0) = 1$, to $f' = f$. W przyszłości pokażemy, że jedyną taką funkcją jest $y = e^x$.

♢ ♢ ♢

11. Pokaż, że funkcja $f(x) = x\sin(1/x)$ dla $x \neq 0$, $f(0) = 0$ nie jest różniczkowalna w punkcie zero. Czy ma w tym punkcie pochodne jednostronne? A niewłaściwe?

12. Wyraź za pomocą pochodnej związek pomiędzy polem koła a obwodem okręgu oraz pomiędzy powierzchnią kuli a jej objętością. Zakładając, ze podobny związek zachodzi także w wyższych wymiarach znajdź powierzchnię kuli czterowymiarowej, wiedząc, że jej objętość wynosi $\pi^2/2$.

13. Pokaż, że styczna poprowadzona do wykresu funkcji $y = f(x)$ w punkcie $P = (a, f(a))$ przecina oś Ox w punkcie o współrzędnej x-owej
$$a^* = a - \frac{f(a)}{f'(a)}.$$
   a) Zapisz ten wzór dla funkcji $y = x^2 - 2$.

   b) Rozważmy ciąg określony warunkami $x_0 = 1$, $x_{n+1} = x_n^*$. Oblicz kilka początkowych jego wyrazów i odgadnij jego granicę.

   c) Znajdź w podobny sposób przybliżoną wartość pierwiastka równania $x^3 + x = 3$.

Lista 7 - Obliczanie pochodnych

1. Oblicz pochodną korzystając z podstawowych wzorów:

   a) $y = x^4 - x + 1$; b) $y = x\sqrt{x}$; c) $y = xe^x$; d) $y = x^2 \ln x$
   e) $y = \dfrac{x^3+1}{x^2+1}$; f) $y = \dfrac{\ln x}{x}$; g) $y = \dfrac{x+e^x}{x-e^x}$; h) $y = \dfrac{1+\ln x}{1+x^2}$.

2. Korzystając ze wzorów na pochodne eksponenty e^x, logarytmu naturalnego oraz wzoru na pochodną funkcji złożonej wyprowadź wzory na pochodną:

   a) $y = a^x$; b) $y = \log_a x$, gdzie a dodatnie, różne od 1.

3. Oblicz pochodną korzystając ze wzoru na pochodną funkcji złożonej:

   a) $y = e^{-x^2}$; b) $y = (1+x^2)^6$; c) $y = \ln(x^2+1)$; d) $y = (x + \ln x)^3$;
   e) $y = \ln(1+e^x)$; f) $y = \sqrt{1+x^2}$; g) $y = \ln\sqrt{x+x^2}$; h) $y = \sqrt{\dfrac{1+x}{1+x^2}}$.

4. Znajdź równanie stycznej do wykresu funkcji

   a) $y = \dfrac{1+x}{1+x^2}$ w punkcie $(-1, f(-1))$; b) $y = \dfrac{e^x-1}{e^x+1}$ w punkcie $(0, f(0))$;
   c) $y = \ln(x^2+1)$ w punkcie $(1, f(1))$; d) $y = \ln\ln x$ w punkcie $(e, f(e))$.

5. Sprawdź, że $(\sin^2 x)' = \sin 2x$. Wywnioskuj stąd wzór na pochodną $\cos^2 x$.

6. Oblicz pochodne funkcji:

   a) $y = x\cos x$; b) $y = \dfrac{\sin x}{x}$; c) $y = (\sin x + \cos x)^2$; d) $y = \mathrm{tg}^2 x$;
   e) $y = x \arctan x$; f) $y = \sin^3 x + \cos^3 x$; g) $y = \dfrac{x}{\arcsin x}$; h) $y = \arctan^2 x$.

7. Znajdź równanie stycznej do wykresu $y = \mathrm{tg}\, x$ w punkcie $(\pi/4, 1)$. Wywnioskuj z niego równanie stycznej do wykresu $y = \mathrm{arctg}\, x$ w punkcie: a) $(1, \pi/4)$; b) $(-1, -\pi/4)$.

8. Znajdź równanie stycznej do wykresu funkcji $y = \sqrt{1-x^2}$ w punkcie $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ dwiema metodami: a) geometrycznie; b) algebraicznie.

9. Załóżmy, że f jest różniczkowalna. Korzystając z definicji wyprowadź wzór na pochodną funkcji: a) $y = f(x^2)$; b) $y = f(e^x)$.

◊ ◊ ◊

10. W jakim punkcie styczna do wykresu funkcji $y = \sqrt{2x - x^2}$ jest równoległa do:

    a) osi Ox; b) prostej $y = x$; c) osi Oy?

11. Wyprowadź wzór na pochodną $y = \sqrt{1+x^2}$ nie korzystając ze wzoru na pochodną funkcji złożonej. Wsk. Skorzystaj ze wzoru na pochodną iloczynu.

12. Korzystając ze wzoru na pochodną $y = x^n$ dla wykładników naturalnych oraz wzoru na pochodną funkcji odwrotnej znajdź pochodną $y = \sqrt[n]{x}$. Wywnioskuj stąd wzór na pochodną $y = x^\alpha$ dla wymiernych wykładników.

Lista 8 - Monotoniczność, ekstrema i wypukłość

1. Uzasadnij, że funkcja $y = x^3 + x^2 + x + 1$ jest rosnąca.

2. Naszkicuj wykres wielomianu: a) $y = x^3 - 3x + 1$; b) $y = x^4 - 4x^2 - 4x$.

3. Znajdź ekstrema podanych funkcji i określ ich rodzaj:

   a) $x(x+1)^3$; b) $y = \sqrt{x^4 + x^2 + 1}$; c) $y = \dfrac{x^2}{x-2}$; d) $y = x^2 \ln x$; e) $y = \dfrac{x^2}{e^x}$.

4. Znajdź ekstrema i przedziały monotoniczności:

   a) $y = \dfrac{x+2}{x^2-1}$; b) $y = x\sqrt{4-x^2}$; c) $y = \dfrac{1+\ln x}{x}$; d) $y = x^4 - 4x^2 + 3$;
   f) $y = x^2 + \dfrac{2}{x}$; g) $y = (x^2 - 3x + 2)^{12}$; h) $y = (x+1)e^x$; i) $y = \sqrt{x^2+1} - 2\sqrt{x+1}$.

5. Naszkicuj wykres funkcji:

   a) $y = \dfrac{x^2+1}{x}$; b) $y = \dfrac{x^3+1}{x}$; c) $y = xe^{-x}$; d) $y = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$; e) $y = x\sqrt{3-2x}$.

6. Znajdź największą i najmniejszą wartość funkcji:

   a) $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ na przedziale $[0, 3]$; b) $y = x + |x^2 - 1|$ na przedziale $[-1, 4]$.

7. Znajdź liczbę pierwiastków równania $x^3 - 6x^2 + 9x - 6 = 0$.

8. Znajdź zbiór wartości i liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ dla funkcji:

   a) $y = \dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$; b) $y = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{x-3}$. c) $y = \dfrac{1}{x^2-1} + \dfrac{1}{x^2-4} + \dfrac{1}{x^2-9}$.

9. Niech $V(r)$ oznacza objętość walca o podstawie r wpisanego w kulę jednostkową.

   a) Naszkicuj wykres funkcji $V(r)$.

   b) Znajdź największą wartość i zbiór jej wartości.

10. Podaj przykład funkcji wszędzie dodatniej:

    a) rosnącej i wypukłej; b) rosnącej i wklęsłej;
    c) malejącej i wypukłej; d) malejącej i wklęsłej.

11. Znajdź przedziały wypukłości i punkty przegięcia funkcji:

    a) $x^3 - 6x^2$; b) $y = \dfrac{9}{x^2+9}$; c) $y = \dfrac{x^2-1}{x}$; d) $y = x \ln x$; e) $y = xe^x$.

12. Korzystając z wypukłości odpowiednich funkcji uzasadnij nierówność:

    a) $e^x \geq 1 + x$; b) $\ln(1+x) \leq x$: c) $\sin x < x$ dla dodatnich x.

    Zilustruj nierówność szkicując fragmenty wykresów obu porównywanych funkcji.

♢ ♢ ♢

13. Nie korzystając z kalkulatora rozstrzygnij, która z liczb jest większa: e^π czy π^e?

14. Pokaż, że dla funkcji różniczkowalnej f zachodzi równość $f'(x) = [\ln f(x)]' f(x)$. Naszkicuj wykres funkcji $y = x^x$.

15. Znajdź wszystkie możliwe odległości punktu paraboli $y = 2 - x^2$ od początku układu współrzędnych.

Lista 9 - Aproksymacje, wzór Taylora i reguła de l'Hospitala

1. Korzystając z różniczki oblicz przybliżoną wartość:

   a) $\sqrt{3,9}$: b) $\ln 1,1$; c) $\sin 3$; d) $\mathrm{tg}1$.

   Porównaj z wartościami dokładnymi.

2. Z twierdzenia Lagrange'a wynika, że przy odpowiednich założeniach
$$f(x) = f(a) + f'(c)(x-a).$$
   Znajdź c o którym tu mowa w przypadku funkcji:

   a) $f(x) = x^2$, oraz $a = 1$, $x = 2$; b) $f(x) = \ln x$ oraz $a = 1$, $x = e$.

3. Zapisz cztery kolejne przybliżenia taylorowskie dla $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$:

   a) wokół $a = 0$; b) wokół $a = 1$.

4. Oblicz przybliżoną wartość $1/e$ sumując pięć początkowych składników rozwinięcia Maclaurina dla odpowiedniej funkcji. Oszacuj błąd przybliżenia.

5. Korzystając ze wzoru Taylora uzasadnij przybliżenie
$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}.$$
   Oszacuj błąd przybliżenie przy założeniu, że $|x| < \pi/2$.

6. Znajdź:

   a) trzy pierwsze wyrazy rozwinięcia Maclaurina dla $y = \sqrt{1+x}$;

   b) rozwinięcie Maclaurina dla funkcji $y = \ln(1+x)$.

7. Korzystając z reguły de l'Hospitala oblicz granice:

   a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{arctg}\, x}{x}$; c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin \ln x}{\ln x}$; d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^n}{e^x}$;

   e) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln^2 x$; f) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x}\right)$; g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+\sin x}{x+\mathrm{tg}x}$; h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x^3}{\sin^3 x}$;

   i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x^2}{\arcsin x}$; j) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{1/x}$; k) $\lim\limits_{x\to 0} (1+\sin x)^{1/x}$; l) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\ln\cos 2x}{(x-\pi)^2}$.

8. Korzystając z rozwinięcia eksponenty odgadnij granicę
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2}$$
   i sprawdź wynik korzystając z reguły de l'Hospitala.

9. Naszkicuj wykres funkcji: a) $y = \dfrac{\ln x}{x}$; b) $y = x\ln x$.

$\diamond \quad \diamond \quad \diamond$

10. Korzystając z twierdzenia Lagrange'a wykaż, że jeśli $f' = f$, to $f(x) = Ce^x$.

11. Uzasadnij, że błąd aproksymacji $f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a)$ jest równy co najwyżej iloczynowi połowy maksimum drugiej pochodnej na przedziale $[a,x]$ (bądź $[x,a]$) i kwadratu jego długości. Podaj analogiczne oszacowanie błędu aproksymacji $f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)/2(x-a)^2$.

12. Odgadnij asymptoty funkcji $y = \ln(1+e^x)$ i sprawdź swoje przypuszczenia za pomocą obliczeń. Czy wykres przecina którąkolwiek z asymptot?

Lista 10 - Całka oznaczona i wzór Newtona-Leibniza

1. Oblicz podaną całkę przybliżając ją za pomocą sumy prostokątów:

   a) $\int_0^1 x\,dx$; b) $\int_0^1 x^2\,dx$; c)* $\int_1^2 \frac{dx}{x}$.

   Wsk.: b) zachodzi równość $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$; c) dobierz punkty podziału tak, aby tworzyły ciąg geometryczny.

2. Korzystając z geometrycznej interpretacji całki oznaczonej oblicz całki:

   a) $\int_0^4 x\,dx$; b) $\int_0^4 (1 + |x-2|)\,dx$; c) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$; d) $\int_0^2 \sqrt{2x-x^2}\,dx$.

3. Korzystając ze wzoru Newtona-Leibniza oblicz:

   a) $\int_0^1 x^n\,dx$; b) $\int_0^\pi \sin x\,dx$; c) $\int_1^2 \frac{dx}{x}$; d) $\int_{-1}^1 e^x\,dx$.

4. Oblicz pole figury:

   a) ograniczonej parabolą $y = x^2 - 4$ oraz osią Ox;

   b) łukiem sinusoidy $y = 1 + \cos x$, $-\pi \le x \le \pi$ i osią Ox.

5. Znajdź średnią wartość funkcji na wskazanym przedziale:

   a) x^2 na $[0, a]$; b) $\sin x$ na $[0, \pi]$; c) $\cos x$ na $[0, \pi]$; d) $\ln x$ na $[1, e]$.

6. Oblicz przybliżoną wartość całki

   $$\int_1^2 \frac{dx}{x},$$

   dzieląc przedział na 4 równe odcinki i biorąc wartości: a) w lewych końcach przedziału; b) w środkach przedziału. Porównaj z wartością dokładną.

7. Aproksymując pole pod wykresem $y = 1/x$ za pomocą prostokątów wykaż, że suma

   $$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$$

   różni się od $\ln n$ o mniej niż 1.

8. Wyraź za pomocą funkcji f pochodną funkcji F:

   a) $F(x) = \int_x^1 f(t)dt$; b) $F(x) = \int_{-x}^x f(t)dt$; c) $F(x) = \int_1^{x^2} f(t)dt$.

◊ ◊ ◊

9. Nie korzystając ze wzoru Newtona-Leibniza oblicz $\int_0^\pi \sin^2 x\,dx$.

10. Oblicz

    a) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+4} + \ldots + \frac{n}{n^2+n^2} \right)$; b) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \right)$.

11. Oblicz $\int_0^\pi \sin x\,dx$ bezpośrednio z definicji, korzystając ze wzoru na sumę

    $$\sin\alpha + \sin 2\alpha + \ldots + \sin n\alpha = \frac{\sin\frac{n\alpha}{2}\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Lista 11-12 - Techniki całkowania

1. Korzystając z całkowania przez podstawienie znajdź całki:

   a) $\int (2x+1)^7\,dx$; b) $\int e^x\sqrt{1+e^x}\,dx$; c) $\int x\sqrt{4-x^2}\,dx$; d) $\int x\sin x^2\,dx$;

   e) $\int \frac{dx}{x\ln x}$; f) $\int \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx$; g) $\int \frac{e^x\,dx}{1+e^{2x}}$; h) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx$.

2. Korzystając z całkowania przez części znajdź całki:

   a) $\int x\sin x\,dx$; b) $\int xe^{2x}\,dx$; c) $\int x^2\ln x\,dx$; d) $\int \operatorname{arctg} x\,dx$;

   e) $\int x^2e^x\,dx$; f) $\int e^{2x}\sin x\,dx$; g) $\int e^x\sin x\cos x\,dx$; h) $\int x\arcsin x\,dx$.

3. Korzystając ze wzoru Newtona-Leibniza oblicz:

   a) $\int_1^2 xe^x\,dx$; b) $\int_0^{\sqrt{2}} x\sqrt{1+x^2}\,dx$ c) $\int_1^e \ln x\,dx$; $\int_0^1 x\operatorname{arctg} x dx$.

4. Oblicz poniższe całki nieoznaczone:

   a) $\int \frac{dx}{2x+1}$: b) $\frac{dx}{(x+2)^3}$; c) $\int \frac{dx}{x^2+4}$; d) $\int \frac{x\,dx}{(1+x^2)^3}$.

5. Rozłóż na ułamki proste i znajdź całkę nieoznaczoną:

   a) $\int \frac{dx}{x(x-1)}$; b) $\int \frac{x\,dx}{x^2-4}$; c) $\int \frac{(x+1)\,dx}{x(x+1)(x+2)}$; d) $\int \frac{x^2\,dx}{1+x+x^2+x^3}$;

   e) $\int \frac{x\,dx}{x^2+4}$; f) $\int \frac{(2x+3)\,dx}{x^2+1}$; g) $\int \frac{(2x+1)\,dx}{x^2+x+1}$; h) $\int \frac{x\,dx}{4x^2+1}$;

   i) $\int \frac{dx}{x^2+2x+2}$; j) $\int \frac{2x\,dx}{x^2+6x+10}$; k) $\int \frac{dx}{x^3+4x}$; l) $\int \frac{x\,dx}{x^4-1}$.

6. Oblicz całkę:

   a) $\int \frac{x^3+1}{x^2+1}\,dx$; b) $\int \frac{x^4+1}{x+1}\,dx$; c) $\int \frac{x^4+1}{x^2-1}\,dx$; d) $\int \frac{x^4}{(x-1)(x-2)}\,dx$. .

7. Oblicz całki z funkcji trygonometrycznych:

   a) $\int \operatorname{tg} x\,dx$; b) $\int \cos^2 x\,dx$; c) $\int \sin^3 x\,dx$; d) $\int \cos^4 x\,dx$;

   e) $\int \sin 3x\sin x\,dx$; f) $\int \sin x\cos 5x\,dx$; g) $\int \cos 2x\cos 4x\,dx$; h) $\int \frac{dx}{\sin x}$.

8. Pamiętając, że $(\operatorname{tg} x)' = 1+\operatorname{tg}^2 x$ oblicz $\int \operatorname{tg}^2 x\,dx$.

9. Znajdź całkę nieoznaczoną $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$ za pomocą podstawienia $x=\sin t$. Korzystając z tej całki pokaż, że pole koła $x^2+y^2\le 1$ jest równe π.

10. Pokaż, że jeśli $t=\operatorname{tg}(x/2)$, to

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}.$$

11. Korzystając z podstawienia $t=\operatorname{tg}(x/2)$ oblicz całkę:

$$\int \frac{dx}{1+\cos x+\sin x}.$$

12. Oblicz całkę z funkcji $1/\sin x$:

a) kontynuując obliczenia

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x dx}{\sin^2 x} = \int \frac{\sin x dx}{1-\cos^2 x} =;$$

b) korzystając z podstawienia $t = \mathrm{tg}(x/2)$.

13. Oblicz poniższą całkę kontynuując obliczenia:

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \int \frac{(1+x^2)dx}{(1+x^2)^2} - \int \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^2} = \int \frac{dx}{1+x^2} - \int \frac{x}{2} \cdot \frac{2x dx}{(1+x^2)^2} =$$

$\diamondsuit \quad \diamondsuit \quad \diamondsuit$

14. Wyprowadź zależność

$$\int x^n \cos x \, dx = x^n \sin x - n \int x^{n-1} \sin x \, dx.$$

15. Funkcje hiperboliczne definiujemy wzorami

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

a) Podaj przykłady analogii (tożsamości, pochodne, całki) pomiędzy funkcjami hiperbolicznymi a trygonometrycznymi.

b) Czy funkcje hiperboliczne są ograniczone? okresowe?

c) Sprawdź, że każdy punkt postaci $(\pm\cosh t, \pm\sinh t)$ leży na hiperboli $x^2 - y^2 = 1$, a także (trudniejsza część zadania), iż każdy punkt tej hiperboli ma taką postać.

16. Korzystając z podstawienia $x = \cosh t$ oblicz całkę

$$\int \sqrt{1+x^2}\, dx.$$

Lista 13 - Zastosowania całek oznaczonych

1. Oblicz pole obszaru ograniczonego krzywymi:

   a) $y = 2x - x^2$, $x + y = 0$; b) $y = x^2 - 1$, $y = 1 - x^2$; c) $yx = 1$, $y = x$, $y = 0$, $x = 2$;

   d) $x = 0$, $y = \arcsin x$, $y = \pi/2$; e) $y = x^2$, $x = y^2$; f) $y = 4 - x$, $y = 2\sqrt{x}$.

2. Oblicz pole obszaru ograniczonego elipsą $4x^2 + y^2 = 1$.

3. Oblicz objętość i powierzchnię bryły utworzonej przez obrót łuku sinusoidy $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$ wokół osi Ox.

4. Korzystając ze wzorów na objętość i pole powierzchni bryły utworzonej przez obrót wokół osi Oy oblicz objętość i pole powierzchni bryły powstałej w wyniku obrotu wokół tej osi:

   a) odcinka $y = x$, $0 \leq x \leq a$; b) odcinka paraboli $y = x^2$, $0 \leq x \leq a$.

   Jak rozwiązać b) korzystając z wzorów na obrót wokół osi Ox?

5. Korzystając ze wzoru na długość łuku:

   a) oblicz długość łuku $y = x\sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 1$;

   b) oblicz długość łuku krzywej łańcuchowej $y = (e^x + e^{-x})/2$, $-1 \leq x \leq 1$;

   c) sprawdź, że obwód okręgu $x^2 + y^2 = 1$ jest równy 2π.

   Uwaga: W zadaniu c) pojawia się całka niewłaściwa (wykraczająca na niektórych kierunkach poza program), ale nie ma to wpływu na obliczenia.

6. Wyprowadź znane wzory na objętość i pole powierzchni kuli o promieniu R.

7. Znajdź współrzędne środka masy:

   a) półkola ograniczonego łukiem $x^2 + y^2 = 1$ i osia Ox;

   b) trójkąta ograniczonego prostymi $y = 2 - x$, $y = -2 + x$ oraz osią Oy.

$\diamondsuit \quad \diamondsuit \quad \diamondsuit$

8. Trąbką Torricellego nazywamy powierzchnię powstałą przez obrót krzywej $y = 1/x$, $x \geq 1$ wokół osi Ox.

   a) Pokaż, że powierzchnia trąbki jest nieskończona, a jej objętość skończona.

   b) Wypełniając tę trąbkę farbą pomalujemy nieskończoną wewnętrzna powierzchnię za pomocą skończonej ilości farby. Wyjaśnij ten paradoks.

   Uwaga: W zadaniu tym operujemy tzw. całką niewłaściwą. Dość łatwo jest takiej całce nadać ścisły sens bądź znaleźć definicję w literaturze/Internecie.

9. Oblicz powierzchnię torusa utworzonego przez obrót okręgu $x^2 + (y - R)^2 = r^2$ $(R > r)$ wokół osi Ox. Sprawdź, że powierzchnia ta jest równa iloczynowi obwodu okręgu tego okręgu przez drogę, jaka przebywa jego środek.

10. Oblicz powierzchnię czaszy wyciętej ze sfery $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ płaszczyzną $z = a$, gdzie $0 < a < 1$. Sprawdź, że jest ona równa powierzchni jej rzutu prostokątnego na powierzchnie walca stycznego do tej sfery.