Lista 1 z Podstaw logiki, teorii automatów i obliczalności
do wykładu dra hab. Sz. Żeberskiego

1. Sprawdź, które z poniższych zdań są tautologiami

   a) $(p \wedge (q \vee r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$,
   b) $(p \vee (q \wedge r)) \leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$,
   c) $(p \vee \neg q) \rightarrow (p \wedge q)$,
   d) $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$,
   e) $((p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r)) \rightarrow (p \leftrightarrow r)$,
   f) $(p \rightarrow q \rightarrow r) \rightarrow (p \vee r)$,
   g) $p \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$,
   h) $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q))$.

2. Wyraź funkcje OR, AND, IF, IFF oraz NOT używając działań $+$, $-$, $\cdot$ traktując wartości logiczne 0 (fałsz), 1 (prawda) jako liczby całkowite.

3. Spójnik Pierce, zwany również operatorem NOR, jest zdefiniowany wzorem $p \perp q = (\neg p \wedge \neg q)$. Kreska Shefera, zwana również operatorem NAND, jest zdefiniowana wzorem $p \mid q = (\neg p \vee \neg q)$.

   a) Wyraź alternatywę, implikację oraz równoważność za pomocą negacji oraz koniunkcji.
   b) Wyraź koniunkcję, implikację oraz równoważność za pomocą negacji oraz alternatywy.
   c) Wyraź negację, koniunkcję, alternatywę, implikację oraz równoważność za pomocą spójnika Pierce'a.
   d) Wyraź negację, koniunkcję, alternatywę, implikację oraz równoważność za pomocą kreski Shefera.

4. Spójnik $\triangle$, zwany operatorem XOR, jest zdefiniowany wzorem $p \triangle q = (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$.

   a) Udowodnij łączność spójnika $\triangle$.
   b) Oblicz $p \triangle p$, $(p \triangle q) \triangle q$, $p \triangle \perp$, $p \triangle \top$.

   $\perp$ oznacza zdanie fałszywe, a $\top$ - zdanie prawdziwe przy dowolnej waluacji.

5. Ile istnieje nierównoważnych zdań rachunku zdań

   a) zbudowanych ze zmiennej zdaniowe p?
   b) zbudowanych ze zmiennych zdaniowych p, q?
   c) zbudowanych ze zmiennych zdaniowych $p_0, p_1, \ldots, p_n$?

6. Pokaż, że za pomocą koniunkcji i alternatywy nie można zdefiniować negacji.

7. Pokaż, że za pomocą alternatywy i koniunkcji nie można zdefiniować implikacji.

8. Czy dla dowolnych zbiorów A, B i C prawdziwe są następujące równości:

   a) $A \cap A = A$,
   b) $(A \cup B) \cap B = (A \cap B) \cup B$,
   c) $A \cup B = B \cup A$,
   d) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$,
   e) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$,
   f) $A \cup (B \cap C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
   g) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,
   h) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$,
   i) $(A \setminus B) \cup C = (A \cup C) \setminus (B \cup C)$,
   j) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$.

9. Czy dla dowolnych zbiorów A, B, C i D prawdziwe są następujące zdania:

a) $A \subseteq A$,
b) $A \cup B \subseteq A$,
c) $(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C) \to A \subseteq C$,
d) $A \subseteq A \cup B$,
e) $A \subseteq A \cap B$,
f) $A \cap B \subseteq A$.
g) $(A \subseteq C) \vee (B \subseteq C) \to A \cup B \subseteq C$,
h) $(A \subseteq C) \wedge (B \subseteq C) \to A \cup B \subseteq C$,
i) $(A \subseteq B) \wedge (A \subseteq C) \to A \subseteq B \cap C$,
j) $(A \subseteq B) \vee (C \subseteq D) \to A \cup C \subseteq B \cup D$,
k) $(A \subseteq B) \wedge (C \subseteq D) \to A \cup C \subseteq B \cup D$,
l) $(A \subseteq B) \wedge (C \subseteq D) \to A \cap C \subseteq B \cap D$.

10. Niech A i B będą podziorami ustalonej przestrzeni Ω. Pokaż, że

a) $(A^c)^c = A$,
b) $A \setminus B = A \cap B^c$,
c) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$,
d) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$,
e) $\emptyset^c = \Omega$,
f) $\Omega^c = \emptyset$,
g) $A \subseteq B \to B^c \subseteq A^c$.

11. Pokaż, że $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$ oraz $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$ dla dowolnych zbiorów A, B i C.

12. Pokaż, że $A \setminus (A \setminus (A \setminus B)) = A \setminus B$ dla dowolnych zbiorów A, B.

13. Wyznacz zbiory $P(\emptyset)$, $P(P(\emptyset))$, $P(\{P(\emptyset)\})$, $P(\{a, b\})$, $P(\{a, b, c\})$.

14. Czy iloczyn kartezjański jest operacją łączną? Czy jest przemienny?

15. Czy dla dowolnych zbiorów A, B i C prawdziwe są następujące równości:

a) $(A \times B) \times C = (A \times C) \times (B \times C)$,
b) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$,
c) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$,
d) $(A \cap B) \times C = (A \cap C) \times (B \cap C)$.

16. Pokaż, że $A \times B = B \times A$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A = B \vee A = \emptyset \vee B = \emptyset$.

17. Pokaż, że $A \subseteq B$ wtedy i tylko wtedy, gdy $P(A) \subseteq P(B)$. Czy dla dowolnych A, B mamy $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$ i $P(A) \cup P(B) = P(A \cup B)$?

18. Niech $\varphi(x)$ i $\phi(x)$ będą funkcjami zdaniowymi określonymi dla elementów przestrzeni Ω. Pokaż, że

a) $\{x \in \Omega : \ \varphi(x)\}^c = \{x \in \Omega : \neg\varphi(x)\}$,
b) $\{x \in \Omega : \ \varphi(x) \wedge \phi(x)\} = \{x \in \Omega : \varphi(x)\} \cap \{x \in \Omega : \phi(x)\}$,
c) $\{x \in \Omega : \ \varphi(x) \vee \phi(x)\} = \{x \in \Omega : \varphi(x)\} \cup \{x \in \Omega : \phi(x)\}$.