**Lista 2 z Teoretycznych podstaw informatyki i elementów logiki do wykładu dra hab. Sz. Żeberskiego**

1. Podaj przykład pary $\mathbb{M}$, $\mathbb{N}$ spełniającej warunki $\mathbb{M} \subseteq \mathbb{N}$, $\mathbb{M} \equiv \mathbb{N}$, ale $\mathbb{M} \not\preceq \mathbb{N}$.

2. Podaj aksjomaty teorii algebr Boole'a. Udowodnij, że dla dowolnego niepustego zbioru $A$ struktura $(P(A), \cap, \cup, {}^c, \emptyset, A)$ jest algebrą Boole'a.

3. W $(P(A), \cap, \cup, {}^c, \emptyset, A)$ pomiędzy elementami algebry można zadać naturalny częściowy porządek $\subseteq$. jak zdefiniować analogiczny porządek w dowolnej algebrze Boole'a.

4. Dla nieskończonego zbioru $A$ znajdź $\mathcal{B} \subseteq P(A)$, które jest uniwersum bezatomowej algebry Boole'a. (Algebra jest bezatomowa, jeśli wśród elementów niezerowych nie ma minimalnych.)

5. Uniwersum algebry Lindenbaumma stanowi zbiór klas abstrakcji relacji $\equiv$ określonej na zdaniach rachunku zdań formułą
$$\varphi \equiv \psi \iff \models \varphi \leftrightarrow \psi.$$
Zdefiniuj naturalne działania w tej algebrze Boole'a. Jak można zinterpretować porządek? Przyjmując, że zdania rachunku zdań są budowane przy uzyciu zmiennych $p_0, p_1, p_2, \ldots$ udowodnij, że algebra Lindenbaumma jest przeliczalną bezatomową algebrą Boole'a.

6. Udowodnij, że teoria bezatomowych algebr Boole'a jest $\aleph_0$-kategoryczna, czyli dowolne dwie przeliczalne bezatomowe algebry Boole'a są izomorficzne.

7. Czy teoria algebr Boole'a jest zupełna? Czy teoria bezatomowych algebr Boole'a jest zupełna?

8. W modelu $(\mathbb{R}, \leq)$ znajdź elementarną podstrukturę o możliwie najmniejszej mocy (lub minimalną, jeśli to możliwe), która zawiera
   a) zbiór $\{\sqrt{2}, \sqrt{3}\}$,
   b) zbiór liczb algebraicznych,
   c) zbiór liczb niewymiernych.

   Co zmieni się, gdy na starcie rozważymy $(\mathbb{R}, +, \leq)$?

9. Używając gier Erenfeuchta-Fraiseego udowodnij, że struktura $(\mathbb{Z}, \leq)$ jest elemnetarnie równoważna $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \leq_{lex})$.
$\leq$ oznacza tu standardowy porządek na liczbach całkowitych, a $\leq_{lex}$ leksykograficzny porządek na parach.

10. Czy struktury z poprzedniego zadania są izomorficzne?

11. Co z elementarną równoważnością i izomorfizmem po zmianie zbiorru $\mathbb{Z}$ na $\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ (także po stronie z produktem)?