Lista 3 z Teoretycznych podstaw informatyki i elementów logiki do wykładu dra hab. Sz. Żeberskiego

1. Niech $\mathcal{F} \subseteq P(X)$ będzie filtrem. Udowodnij, że następujące warunki są równoważne:

   a) $\mathcal{F}$ jest ultrafiltrem;

   b) $(\forall A \subseteq X)(A \in \mathcal{F} \vee (X \setminus A) \in \mathcal{F})$;

   c) $(\forall A, B \subseteq X)(A \cup B \in \mathcal{F} \to A \in \mathcal{F} \vee B \in \mathcal{F})$.

2. Udowodnij, że każdy filtr można rozszerzyć do ultrafiltru (użyj lematu Kuratowskiego-Zorna).

3. Filtr $\mathcal{F} \subseteq P(X)$ nazywamy głównym jeśli istnieje taki $A \subseteq X$, że $\mathcal{F} = \{Y \subseteq X : \; A \subseteq Y\}$. Udowodnij, że filtr główny, w istocie, jest filtrem. Znajdź wszystkie główne ultrafiltry.

4. Udowodnij, że istnieje rodzina $\{A_x : \; x \in \mathbb{R}\} \subseteq P(\mathbb{N})$ zbiorów niezależnych, tj. takich, że

$$A_{x_1}^{i_1} \cap A_{x_2}^{i_2} \cap \ldots \cap A_{x_k}^{i_k} \neq \emptyset$$

   dla dowonlego $k \in \mathbb{N}_+$ oraz dowolnych parami różnych $x_1, x_2, \ldots, x_k$.
   $A_x^1 = A_x, \; A_x^0 = \mathbb{N} \setminus A_x$.

   a) Rozważ $A_x = \{B \in [\mathbb{Q}]^{<\aleph_0} : \; 2 \text{ dzieli } |(-\infty, x] \cap B)|\}$.

   b) Rozważ $A_x = \{B \in \mathcal{B} : \; x \in B\}$, gdzie $\mathcal{B}$ jest przeliczalną (topologiczną) bazą $\mathbb{R}$ zamkniętą na skończone sumy.

5. Udowodnij, że zbiór ultrafiltrów $\mathcal{U} \subseteq P(\mathbb{N})$ jest mocy $2^{2^{\mathfrak{c}}}$.

6. Niech $\mathcal{U} \subseteq P(T)$ będzie głównym ultrafiltrem. Znajdź strukturę izomorficzną z $\prod_{t \in T} \mathbb{M}_t / \mathcal{U}$.

7. Niech $\mathcal{U} \subseteq P(\mathbb{N})$ będzie niegłównym ultrafiltrem, $|M_n| \geq n$. Udowodnij, że ultraprodukt $\prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{M}_n / \mathcal{U}$ ma nieskończone uniwersum.

8. Niech $\mathcal{U} \subseteq P(\mathbb{N})$ będzie niegłównym ultrafiltrem, $|M_n| = \aleph_0$. Jaka jest moc uniwersum ultraproduktu $\prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{M}_n / \mathcal{U}$.

9. Niech p będzie liczbą pierwszą. Mówimy, że ciało F ma charakterystykę p ($\chi(F) = p$) jeśli $\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{p} = 0$.

   a) Znajdź takie F mocy p, że $\chi(F) = p$.

   b) Znajdź takie F, że $\chi(F) = p$ oraz F ma dowolnie dużą skończoną moc. (Rozważ reszty z dzielenia wielomianów and $\mathbb{F}_p$ przez wielomian nierozkładalny.)

   c) Pokaż, że istnieje nieskończone ciało o charakterystyce p.

10. Niech p_n oznacza n-tą liczbę pierwszą. Czym jest $\prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{F}_{p_n} / \mathcal{U}$, dla niegłównego ultrafiltru $\mathcal{U} \subseteq P(\mathbb{N})$.

11. Niech $\mathbb{M} = (\mathbb{N}, +, \cdot, \leq, 0, 1)$ będzie standardowym modelem liczb naturalnych. Przez $\mathbb{N}^* = \mathbb{M}^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}$ oznaczmy ultrapotęgę.

   a) Pokaż, że w $\mathbb{N}^*$ istnieją "nieskończenie duże" liczby naturalne (czyli takie, które są większe od wszystkich standardowych).

   b) Pokaż, że suma oraz iloczyn nieskończenie dużych jest nieskończenie duża.

12. Niech $\mathbb{M} = (\mathbb{R}, +, \cdot, \leq, 0, 1)$ będzie standardowym modelem liczb rzeczywistych. Przez $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}$ oznaczmy ultrapotęgę.

   a) Pokaż, że w $\mathbb{R}^*$ istnieją "nieskończenie małe" liczby rzeczywiste (czyli takie, które są większe od wszystkich standardowych $\varepsilon > 0$).

   b) Wyraź definicję granicy, pochodnej używając nieskończenie małych.

13. Czy funkcja $[f]_{\mathcal{U}} \mapsto [f]_{\mathcal{V}}$ jest izomorfizmem pomiędzy $\prod_{t \in T} \mathbb{M}_t/\mathcal{U}$ oraz $\prod_{t \in T} \mathbb{M}_t/\mathcal{V}$?