Algebra z geometrią analityczną – MAP1015, MAP1016, MAP1017
Zadania dodatkowe (utrwalające)

Zadania z list dodatkowych zawierają głównie zadania rachunkowe, ułatwiające utrwalenie materiału poznanego na wykładzie. Są one o różnym stopniu trudności. Do zadań dołączone są odpowiedzi.

Niektóre z poniższych zadań są mojego autorstwa, większość jednak jest zaczerpnięta lub wzorowana na zadaniach ze zbiorów zadań cytowanych na listach podstawowych. Zadania z plusem wykraczają nieznacznie poza obowiązujący program. Zadania z gwiazdką obowiązują na Wydziałach: **Elektrycznym, Elektroniki** oraz **Elektroniki Mikrosystemów i Fotoniki**.

Wiesław Dudek

Uwaga. Nadal obowiązują listy podstawowe i uzupełniające, opracowane przez prof. Krystynę Ziętak.

Macierze

1. Obliczyć podane iloczyny macierzy:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$,

c) $\begin{bmatrix} 3 & -4 & -5 \\ 2 & -3 & -3 \\ 3 & -5 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 29 \\ 2 & 18 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^T$.

2. Dla macierzy $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ oraz $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ obliczyć (o ile to możliwe) podane wyrażenia:

a) $2A - B$, b) AB, c) AB^T, d) $A^T B$, e) A^3, f) $(B^T A)^2$, g) $A + B - I$.

3. Obliczyć AB i BA dla macierzy: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

4. Obliczyć $B = AA^T - 4I$ oraz $C = A^T A - 4I$, gdzie $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, a I jest macierzą jednostkową.

5. Wyznaczyć wszystkie macierze przemienne z macierzą $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

6. Uzasadnić, że iloczyn macierzy diagonalnych jest macierzą diagonalną. Czy iloczyn macierzy trójkątnych górnych jest macierzą trójkątną górną?

7. Obliczyć $B^{13} + B$ dla macierzy:

a) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

8. Znaleźć macierz rzeczywistą X spełniającą równanie:

a) $2X - 3X^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$, b) $X + X^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, c) $XX^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$,

d) $XX^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, e) $\left(AA^T\right) X = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, gdzie $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$.

9. Rozwiązać poniższe równania macierzowe:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 & 12 \\ 14 & 6 \end{bmatrix}$,

c) $X^T \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, d) $X + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = 2X - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,

e) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot X + \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 \\ -5 & 0 & -3 \\ -4 & -3 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 8 \\ 4 & 5 & 5 \end{bmatrix}$.

10. Wyznaczyć macierze X i Y spełniające równanie $XA = I + Y$ wiedząc, że dwie pierwsze kolumny macierzy Y składają się z samych zer, macierz I jest macierzą jednostkową odpowiedniego wymiaru oraz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

11. Znaleźć wszystkie macierze rzeczywiste X spełniające warunek:

a) $X^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, b) $X^2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, c) $X^2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

12. Znaleźć wszystkie macierze trójkątne górne stopnia dwa spełniające warunek $A^3 = 0$.

13. Znaleźć wzór na n–tą potęgę macierzy:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, c) $C = \begin{bmatrix} \cos x & \sin x & 0 \\ -\sin x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

14. Macierz A spełniającą warunek $A = -A^T$ nazywamy macierzą antysymetryczną (lub skośnie symetryczną). Podać przykłady takich macierzy. Co można powiedzieć o elementach zerowych występujących w tych macierzach?

15. O macierzach $B = [b_{ij}]$ i X wiadomo jedynie, że X jest antysymetryczna oraz $b_{11} = 3$, $b_{12} = 1$, $b_{31} = -2$. Czy na tej podstawie można rozwiązać równanie $(AX)^T = B + A^T$, gdzie $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$?

16. Niech A będzie dowolną macierzą kwadratową. Pokazać, że macierz $B = A + A^T$ jest symetryczna, a macierz $C = A - A^T$ antysymetryczna.

17. Poniższą macierz przedstawić jako sumę macierzy symetrycznej i antysymetrycznej

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Czy każdą macierz kwadratową można przedstawić jako sumę macierzy symetrycznej i antysymetrycznej?

18. Znaleźć wszystkie macierze trójkątne górne (dolne) A stopnia 2 spełniające warunek $AA^T = I$.

19. Rozwiązać równanie $AX = I$, gdzie $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Czy $X = A^{-1}$? Obliczyć XA.

20^+. Wyznaczanie macierzy odwrotnej A^{-1} metodą przekształceń elementarnych (metodą bezwyznacznikową) polega na wykonywaniu takich elementarnych operacji na wierszach macierzy $[A, I]$, by otrzymać macierz postaci $[I, X]$. Wówczas otrzymana macierz X będzie macierzą odwrotną do macierzy A. Jeśli w trakcie wykonywania przekształceń elementarnych okaże się, że otrzymanie macierzy $[I, X]$ nie jest możliwe, to macierz A^{-1} nie istnieje. Zastosować powyższą metodę do wyznaczenia macierzy odwrotnych do następujących macierzy:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -5 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & -1 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Czy wszystkie macierze odwrotne istnieją?

21. Obliczyć macierz $\frac{1}{2}C^{-1}D^T$ dla

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 18 & 18 & 17 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

22. Rozwiązać poniższe równania macierzowe:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$;

b) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$;

c) $\begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & -4 \end{bmatrix}^{-1} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & -4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 16 & 17 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Wyznaczniki

1. Obliczyć wyznaczniki:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}$, c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \end{vmatrix}$.

2. Czy równość

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & e^x \\ 1 & e^{-x} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x \end{vmatrix}$$

jest prawdziwa? Jeśli tak, to dla jakiego x?

3. Obliczyć dane wyznaczniki, stosując rozwinięcie Laplace'a:

a) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$, c) $\begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & 2 & 0 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 6 & 0 \end{vmatrix}$, d) $\begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 9 & 2 & 4 & 8 & 4 \end{vmatrix}$.

4. Obliczyć wyznacznik macierzy $C = AB$ oraz $D = AB^T$, gdzie

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{7} \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & \sqrt{5} & 5 & 0 \\ 7 & 8 & \sqrt{8} & 4 \end{bmatrix}.$$

5. Obliczyć poniższe wyznaczniki, wykonując przekształcenia elementarne na wierszach i kolumnach:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 2 \end{vmatrix}$.

6. Stosując przekształcenia elementarne na wierszach lub kolumnach, przekształcić dane wyznaczniki do postaci trójkątnej i następnie obliczyć ich wartość:

a) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

7. Obliczyć wyznacznik macierzy $A = [\,a_{ij}\,]$ stopnia 6 o elementach a_{ij} określonych wzorem
$$a_{ij} = \begin{cases} x & \text{dla} \quad i \leqslant j \\ y & \text{dla} \quad i > j \end{cases}.$$

8. Niech macierze A, B, C będą macierzami kwadratowymi czwartego stopnia takimi, że $\det A = 128$, $\det B = 4$, $\det C = 2$. Obliczyć:
a) $\det\,(2BC^T)$, b) $\det\,((A^{-1}B)^T(2C))^{-1}$.

9. Czy istnieje nieosobliwa macierz A stopnia 3 taka, że $A = -A^T$? A czy może istnieć taka macierz nieosobliwa A dowolnego stopnia n?

10. Wiadomo, że liczby 1798, 2139, 3255, 4867 są podzielne przez 31. Bez obliczania wyznacznika wykazać, że wyznacznik
$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 9 & 8 \\ 2 & 1 & 3 & 9 \\ 3 & 2 & 5 & 5 \\ 4 & 8 & 6 & 7 \end{vmatrix}$$
dzieli się przez 31.

11. Elementami macierzy kwadratowej piątego stopnia są liczby 0 i 1 rozmieszczone w taki sposób, że w każdym wierszu występują dokładnie trzy jedynki. Wykazać, że wyznacznik tej macierzy dzieli się przez trzy.

12. Wykazać, że macierze A oraz $B = S^{-1}AS$ mają takie same wyznaczniki. Czy z równości $SB = AS$ wynika równość $\det A = \det B$? Uzasadnić odpowiedź.

13. Jakie są możliwe wartości wyznacznika macierzy X spełniającej równanie macierzowe $X^2 - X^T = 0$. Podać odpowiednie przykłady.

14. Udowodnić następujące równości:
a) $\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & b_3+c_3 \\ a_1+c_1 & a_2+c_2 & a_3+c_3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$,
b) $\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_2+b_2x & a_3+b_3x \\ a_1-b_1x & a_2-b_2x & a_3-b_3x \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = -2x \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$.

15. Wykorzystując własności wyznaczników, wykazać, że następujące wyznaczniki są równe zeru:
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ (a+1)^2 & (b+1)^2 & (c+1)^2 & (d+1)^2 \\ (a+2)^2 & (b+2)^2 & (c+2)^2 & (d+2)^2 \\ (a+3)^2 & (b+3)^2 & (c+3)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}.$$

16. Podać warunki, jakie muszą spełniać liczby $x, y \in R$, by istniały macierze odwrotne do danych macierzy:
a) $\begin{bmatrix} \cos x & e^x \\ e^{-x} & \cos x \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} x & 0 & y \\ 0 & 1 & 0 \\ y & 0 & x \end{bmatrix}$, c) $\begin{bmatrix} 0 & x & 0 & x \\ x & 0 & x & 1 \\ 0 & x & 1 & x \\ x & 1 & x & 1 \end{bmatrix}$.

17. Niech macierz A będzie odwracalna. Czy równania $AX = B$ oraz $YA = B$ mają takie same rozwiązania? Wyznaczając odpowiednie macierze odwrotne, rozwiązać te równania dla:

$$A=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&0&-1\\1&2&2\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}1&7&1\\2&3&0\\-2&5&1\end{bmatrix}.$$

18. Za pomocą macierzy dołączonej dopełnień algebraicznych wyznaczyć macierze odwrotne do macierzy:

a) $\begin{bmatrix}32&14&-1\\2&1&0\\25&11&-1\end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix}2&0&2\\3&1&4\\4&2&6\end{bmatrix}$, c) $\begin{bmatrix}3&2&1&2\\7&5&2&5\\0&0&9&4\\0&0&11&5\end{bmatrix}$, d) $\begin{bmatrix}3&3&-4&-3\\0&6&1&1\\5&4&2&1\\2&3&3&2\end{bmatrix}$.

19$^+$ Podać wartości parametru $x\in R$, dla których wyznaczniki macierzy $A=[a_{ij}]$ stopnia $n\geqslant 4$ są równe zero, gdzie

a) $a_{ij}=\begin{cases} i & \text{dla} \quad i=j<n\\ x & \text{dla} \quad \text{pozostalych}\end{cases}$, b) $a_{ij}=\begin{cases} x & \text{dla} \quad i=j\\ j-1 & \text{dla} \quad i<j\\ j & \text{dla} \quad i>j\end{cases}$.

20$^+$ Obliczyć wyznacznik macierzy $A=[\,a_{ij}\,]$ stopnia $n\geqslant 4$, gdzie

a) $a_{ij}=\begin{cases} 0 & \text{dla} \quad i=j\geqslant 2\\ 1 & \text{dla} \quad \text{pozostalych}\end{cases}$, b) $a_{ij}=i\cdot j^2$,

c) $a_{ij}=\begin{cases} 1 & \text{dla} \quad |i-j|=1\\ 2 & \text{dla} \quad i=j\\ 0 & \text{dla} \quad \text{pozostalych}\end{cases}$, d) $a_{ij}=\begin{cases} i & \text{dla} \quad i=j\\ j & \text{dla} \quad i=1\\ -i & \text{dla} \quad j=1,\, i\geqslant 2\\ 0 & \text{dla} \quad \text{pozostalych}\end{cases}$

21$^+$ Udowodnić następujące wzory dla wyznaczników U_n, W_n, V_n stopnia $n\geqslant 2$:

a) $$U_n=\begin{vmatrix}5&3&0&\dots&0&0\\2&5&3&\dots&0&0\\0&2&5&\dots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\dots&5&3\\0&0&0&\dots&2&5\end{vmatrix}=3^{n+1}-2^{n+1},$$

b) $$W_n=\begin{vmatrix}1&1&1&\dots&1&1\\1&2&2&\dots&2&2\\1&2&3&\dots&3&3\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\1&2&3&\dots&n-1&n-1\\1&2&3&\dots&n-1&n\end{vmatrix}=1,$$

c) $$V_n=\begin{vmatrix}a&-b&0&\dots&0&0\\0&a&-b&\dots&0&0\\0&0&a&\dots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\dots&a&-b\\-b&0&0&\dots&0&a\end{vmatrix}=a^n-b^n.$$

Układy równań liniowych

1. Rozwiązać dane układy równań liniowych niejednorodnych metodą Gaussa:

a) $\begin{cases} 2x-3y-4z=-6\\ -x+y+z=-2\\ 3x+y+5z=2\end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x+3y+z=8\\ 2x-2y-3z=-3\\ -2x+15y+16z=29\end{cases}$

c) $\begin{cases} x-y-z=1\\ 3x+4y-2z=-1\\ 3x-2y-2z=1\\ x-3y+3z=-1\end{cases}$ d) $\begin{cases} 15x_1+12x_3-3x_3-x_4=14\\ 7x_1+12x_2+4x_3+x_4=8\\ 12x_1-3x_3+2x_4=14\\ -10x_2+x_3+4x_4=4\end{cases}$

e) $\begin{cases} x + 5y + z = 0 \\ -x + y + 7z = 2 \\ 3x + 7y - z = 4 \\ x + 3y + 3z = 4 \\ 2x + 5y + 2z = 5 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 3x_4 = 4 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4 = 3 \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 - 4x_4 = 7 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x + y - z - 2u = 5 \\ x - y - z = 1 \\ 2x - 2z - 2u = 6 \\ 3x - y - 2z - 2u = 7 \\ 2x - 2y + z = 2 \end{cases}$ h) $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x - y = 0 \\ 4x + 3y = 1 \\ 5x - y = 4 \end{cases}$

2. Do układu równań $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x - 2y + 2z = 2 \end{cases}$ dopisać trzecie równanie tak, by otrzymać układ, który będzie układem:
   a) sprzecznym, b) nieoznaczonym (czyli mającym niejednoznaczne rozwiązanie), c) Cramera.

3. Podać wartości parametru $p \in R$, dla których dane układy równań:

   a) $\begin{cases} (p-2)x + py = 1 \\ -3x + (p+2)y = p \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2px + 4y - pz = 1 \\ 2x + y + pz = 2 \\ (4+2p)x + 6y + pz = 3 \end{cases}$

   c) $\begin{cases} x - y - z - t = px \\ -x + y - z - t = py \\ -x - y + z - t = pz \\ -x - y - z + t = pt \end{cases}$ d) $\begin{cases} px + 3y + pz = p \\ px - 2z = 1 \\ x + 2y + pz = p \end{cases}$

   są układami Cramera.

4. Rozwiązać dane układy równań za pomocą wzorów Cramera:

   a) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ 2x + 3y + z = 6 \\ 3x + y + 2z = 6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 14 \\ 3x + y - z = 2 \\ 5x + 7y + 8z = 43 \end{cases}$

5. Stosując wzory Cramera, wyznaczyć tylko wartość niewiadomej y z danych układów:

   a) $\begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ 2x + 2y + z + t = 0 \\ 3x + 2y + 3z + 2t = 3 \\ 6x + 4y + 3z + 2t = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 2y + 3s + t = 1 \\ 2x - 3y + z + 8s + 2t = 3 \\ x - 2y + z + 3s - t = 1 \\ y + 3s + 5t = 0 \\ x - 2y + 5s + 8t = -1 \end{cases}$

6. Niech A będzie ustaloną macierzą i niech równanie macierzowe $AX = I$ ma rozwiązanie. Czy zawsze tym rozwiązaniem jest macierz odwrotna do A?

7. Niech A będzie niesobliwą macierzą stopnia n. Dane są dwa układy równań liniowych niejednorodnych o tej samej macierzy układu A i o różnych prawych stronach B_1, B_2 (macierze jednokolumnowe):

   $$AX_1 = B_1, \quad AX_2 = B_2.$$

   Zadanie rozwiązania tych dwóch układów równań jest równoważne zadaniu rozwiązaniu równania macierzowego $AX = B$, gdzie $X = [X_1, X_2]$ i $B = [B_1, B_2]$ są macierzami dwukolumnowymi.

   Równanie macierzowe $AX = B$ można rozwiązać za pomocą eliminacji Gaussa w następujący sposób:

   - Przekształcamy jednocześnie macierz układu A i macierz prawych stron B za pomocą elementarnych przekształceń tak, by macierz układu została przekształcona do postaci górnej trójkątnej.
     Uwaga. To postępowanie jest równoważne jednoczesnemu przekształcaniu równań w obu układach. To jest możliwe, bo układy maja wspólną macierz układu.

- Następnie rozwiązujemy odpowiednie układy równań liniowych o wspólnej trójkątnej macierzy układu (otrzymanej w pierwszym etapie) i o przekształconych w pierwszym etapie różnych prawych stronach, które są kolumnami przekształconej macierzy prawych stron.

Uwaga. Powyższy sposób można zastosować do większej liczby układów równań liniowych ze wspólną macierzą układu. Wówczas macierz B ma więcej kolumn.

Zastosować powyższą metodę do jednoczesnego rozwiązania par układów równań liniowych $AX_1 = B_1$, $AX_2 = B_2$ dla następujących macierzy:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, $B_1 = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$, $B_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$,

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

8. Metodę opisaną w poprzednim zadaniu można zastosować do obliczenia macierzy odwrotnej A^{-1} poprzez rozwiązanie równania macierzowego $AX = I$. Ten sposób zastosować do obliczenia macierzy odwrotnych do następujących macierzy:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

9^+. Niech A będzie nieosobliwą macierzą stopnia n. Wyznaczenie macierzy odwrotnej A^{-1} jest równoznaczne z rozwiązaniem równania macierzowego $AX = I$. To równanie macierzowe można interpretować jako n układów równań liniowych

$$AX_i = E_i \qquad i = 1, \ldots, n,$$

gdzie E_i jest i-tą kolumną macierzy jednostkowej I stopnia n, a X_i – i-tą kolumną macierzy odwrotnej $X = A^{-1}$. Korzystając z dwóch poprzednich zadań, uzasadnić, że wyznaczenie macierzy odwrotnej A^{-1} jest równoważne przekształceniu (za pomocą elementarnych operacji na wierszach) macierzy $C = [A, I]$ do postaci $[I, X]$. Otrzymana w ten sposób macierz X jest macierzą odwrotną A^{-1} (zob. zadanie 20 z listy o macierzach).

10. Dwoma sposobami wyznaczyć macierze odwrotne do macierzy:

a) $\begin{bmatrix} 32 & 14 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 25 & 11 & -1 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, d) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

11. Wyznaczyć rząd macierzy:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & 2 & 5 & -2 & 7 \\ 2 & 1 & 1 & 8 & 2 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{bmatrix}$, c) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 1 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 3 & -9 & -1 & 6 \\ 3 & -1 & -5 & 7 & 2 & -7 \end{bmatrix}$.

12. Wyznaczyć rząd macierzy w zależności od wartości parametru p:

a) $\begin{bmatrix} 1 & p & -1 & 2 \\ 2 & -1 & p & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ p & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$, c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & p & 0 \\ 3 & p & 4 & -1 \end{bmatrix}$, d) $\begin{bmatrix} p & 1 & 1 & 1 \\ 1 & p & 1 & 1 \\ 1 & 1 & p & 1 \\ 1 & 1 & 1 & p \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

13. Wiadomo, że liczby $x = 2$, $y = 3$, $z = 4$ są rozwiązaniami podanych układów równań:

a) $\begin{cases} x - y - 2z = -9 \\ px + y + z = 9 \\ 2x + py = 7p \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y - z = 4 \\ x - py + 2z = 4 \\ +4x + 4y - z = 8p \end{cases}$

Czy te układy mają jeszcze jakieś inne rozwiązania ?

14. Wyznaczyć wartości parametru $p \in R$ dane układy mają rozwiązania:

a) $\begin{cases} 2x + 3y + z + 2t = 3 \\ 4x + 6y + 3z + 4t = 5 \\ 6x + 9y + 5z + 6t = 7 \\ 8x + 12y + 7z + pt = 9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - y + z + t = 1 \\ x + 2y - z + 4t = 2 \\ x + 7y - 4z + 11t = p \\ 3x + 6y - 3z + 12t = p+1 \end{cases}$

15. Bez rozwiązywania poniższych układów określić liczbę rozwiązań i liczbę zmiennych wolnych w tych rozwiązaniach:

a) $\begin{cases} 2x + y - z + 4u = 1 \\ x - y + 2z - 3u = 2 \\ 3x + z \quad u = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y + 3z = -1 \\ 2x + 4y + 5z = 2 \\ 3x + 6y + 7z = 5 \\ 4x + 8y + 11z = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x - 2y + 6z = -7 \\ 6x + y + 8z = 5 \\ 4x + 3y + 2z = 12 \\ 4x + 5y + 2z = 1 \end{cases}$

16. Określić liczbę rozwiązań w podanych układach równań w zależności od wartości parametru p:

a) $\begin{cases} 2x - y - 3z + 4u = 5 \\ 4x - 2y + 5z + 6u = 7 \\ 6x - 3y + 7z + 8u = 9 \\ px - 4y + 9z + 10u = 11 \end{cases}$ b) $\begin{cases} px + y + z = 1 \\ x + py + z = 1 \\ x + y + pz = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} px + y + z = 1 \\ x + py + z = p-1 \\ 4x + y + pz = (p-1)^2 \end{cases}$

17. Rozwiązać dane układy równań w zależności od parametru p:

a) $\begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ x + 3y + z = 3 \\ 2x + y + pz = p \end{cases}$ b) $\begin{cases} px + py + (p+1)z = p \\ px + py + (p-1)z = p \\ (p+1)x + py + (2p+3)z = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} (p+3)x + y + 2z = p \\ px + (p-1)y + z = 2p \\ 3(p+1)x + py + (p+3)z = 5 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + py = 1 \\ py + z = 0 \\ px + z = -1 \end{cases}$

18. Rozwiązać dane układy równań dowolną metodą:

a) $2 + x + 2y - z - t = 1 + x + y + z + 3t = 3x + 5y - z + t = 3$,

b) $2x - y + z + 3t = 8x + 6y + 10z + 14t = 5 + x + 2y + 2z + 2t = 4$,

c) $x_1 + x_2 + 5x_3 - 2x_5 + 3x_6 + 1 = 4x_1 - 3x_3 + x_4 + x_5 + 3x_6 + 1 = x_1 + 6x_3 + x_5 + x_6 = 2$.

19. W pewnym kurniku mieszkają kury i szczury. Razem mają one 35 głów i 94 nogi. Ile jest kur, a ile szczurów?

20. Do ułożenia podłogi planowano użyć klepek dębowych o powierzchni $1,8\,dm^2$ każda. Z powodu braku takich klepek użyto klepek bukowych o powierzchni $2,1\,dm^2$, wskutek czego liczba potrzebnych klepek zmniejszyła się o 200 sztuk. Jaka jest powierzchnia pokoju i ile zużyto klepek bukowych?

21. Producent do wykonania pewnego urządzenia używa czterech różnych elementów. Elementy te zostały dostarczone w czterech partiach w ilościach uwidocznionych w tabelce.

element	a	b	c	d
dostawa 1	30	10	20	5
dostawa 2	20	15	15	10
dostawa 3	30	20	20	20
dostawa 4	40	20	25	20

Jaka była cena poszczególnych elementów, jeżli za pierwszą dostawę zapłacono 135 euro, za drugą 135 euro, za trzecią 210 euro, a za czwartą 235 euro?

22. Znaleźć równanie paraboli przechodzącej przez punkty:

a) $A(-1,9)$, $B(1,-1)$, $C(2,-3)$, b) $A(1,1)$, $B(2,3)$, $C(3,5)$.

23. W wyniku przeprowadzonej kontroli w magazynie stwierdzono spore braki w dokumentacji. Magazynier twierdzi, że w ciągu ostatniego tygodnia wydał cztery rodzaje artykułów w ilościach przedstawionych w tabelce.

	a	b	c	d
poniedziałek	20	30	40	10
wtorek	10	30	20	70
środa	10	10	20	10
czwartek	15	10	20	10
piątek	25	15	10	10

Wpływy do kasy wyglądały następująco: poniedziałek – 350 tys., wtorek – 690 tys., środa – 170 tys., czwartek – 200 tys., piątek – 205 tys. Czy na tej podstawie można odtworzyć cenę poszczególnych artykułów?

Liczby zespolone

1. Znaleźć liczby rzeczywiste $x, y \in R$ spełniające dane równania:
   a) $x(3-2i)+y(4-5i)=10-9i$, b) $x(-\sqrt{2}+i)+y(3\sqrt{2}+5i)=8i$,
   c) $x(4-3i)^2+y(1+i)^2=7-12i$, d) $(2+3yi)(x-2i)=2+xi$,
   e) $\dfrac{x}{3+i}+\dfrac{y}{1-3i}=1$, f) $x\,\dfrac{2+i}{3-i}+y\left(\dfrac{4-i}{1-3i}\right)^2=1+i$.

2. Znaleźć wszystkie liczby zespolone spełniające dane równania:
   a) $2z+\overline{z}+5i=6$, b) $2z+(1+i)\overline{z}+3i=1$, c) $4\overline{z}=z^2+4$.

3. Znaleźć liczby zespolone z, u spełniające dane układy równań:
   a) $\begin{cases} (2+i)z+(2-i)u=6, \\ (3+2i)z+(3-2i)u=8, \end{cases}$ b) $\begin{cases} (4+2i)z-(2+3i)u=5+4i, \\ (3-i)z+(4+2i)u=2+6i. \end{cases}$

4. Znaleźć wszystkie liczby zespolone z takie, że z^2 jest liczbą rzeczywistą.

5. Wyznaczyć wszystkie liczby zespolone spełniające dane równania:
   a) $z^2=\overline{z}$, b) $z^3=\overline{z}$, c) $(\overline{z})^2=z^2$.

6. Punkty $z_1=0$, $z_2=3+2i$, $z_3=2+3i$ są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku. Wyznaczyć czwarty wierzchołek tego równoległoboku.

7. Na płaszczyźnie zespolonej narysować zbiory punktów odpowiadających liczbom zespolonym spełniającym dane warunki:
   a) $\operatorname{Re}(iz-1)\leqslant 0$, b) $\operatorname{Im}(z^2)>0$, c) $\overline{z+i}=z-i$,
   d) $9\geqslant z\cdot\overline{z}$, e) $0<|z+i|<4$, f) $\operatorname{Re}\dfrac{1-z}{1+z}=1$.

8. Znaleźć postać trygonometryczną danych liczb zespolonych:
   a) $3+3i$, b) $3\sqrt{3}-3i$, c) $-5+5\sqrt{3}\,i$.

9. Znamy postać trygonometryczną liczby z. Jak wygląda postać trygonometryczna liczby $\overline{z}$?

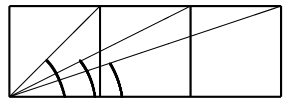
10. Obliczyć wartość danego wyrażenia:
    a) $(2-2i)^{10}$, b) $(2\sqrt{3}-2i)^{30}$, c) $\left(\cos\dfrac{\pi}{5}-i\sin\dfrac{\pi}{5}\right)^{25}$,
    d) $\dfrac{(1+i)^{22}}{(1-\sqrt{3}\,i)^6}$, e) $\dfrac{(\sqrt{3}+i)(-1-\sqrt{3}\,i)}{1-i}$, f) $\left(\dfrac{-\sqrt{3}+i}{2}\right)^{15}$.

    Wynik podać w postaci algebraicznej.

11. Wykazać, że $\left(1+i\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{24}\right)^{12}+\left(1-i\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{24}\right)^{12}=0$.

12. Przedstawić w postaci algebraicznej liczbę $z=(1+i)+(1+i)^2+(1+i)^3+\ldots+(1+i)^8$.

13. Prostokąt przedstawiony na rysunku składa się z trzech kwadratów o boku długości a. Obliczyć sumę zaznaczonych kątów.



14. Narysować zbiory punktów odpowiadających liczbom zespolonym spełniającym dane warunki:
    a) $\pi \leqslant arg\,(iz) < 2\pi$, b) $\frac{\pi}{3} \leqslant arg\,(-z) \leqslant \frac{\pi}{2}$,
    c) $|z-1-2i| > 3$ oraz $|z-3| < 5$, d) $arg\,(-\overline{z}) > \frac{\pi}{2}$,
    e) $|z+4| \leqslant 6$, $Im\,z > 0$, $arg\,z > \frac{\pi}{2}$, f) $|z+2i| < 2$, $-\pi < arg\,z < \pi$.

15. Udowodnić, że dla każdej liczby zespolonej z spełniona jest równość: $|z|^2 + |iz|^2 = |z-iz|^2$. Jaki jest sens geometryczny tej równości?

16. Liczba $z = -1+\sqrt{3}\,i$ jest jednym z wierzchołków kwadratu. Wyznaczyć pozostałe wierzchołki tego kwadratu, gdy jego środkiem jest:
    a) początek układu współrzędnych, b) punkt $z_0 = 1$, c) punkt $z_0 = 3+i$.

17. Obliczyć i zaznaczyć na płaszczyźnie punkty odpowiadające danym pierwiastkom:
    a) $\sqrt{-11+60i}$, b) $\sqrt[3]{i}$, c) $\sqrt[4]{-4}$.

18. Odgadując jeden z elementów danych pierwiastków, obliczyć pozostałe:
    a) $\sqrt{(5-4i)^4}$, b) $\sqrt[3]{(2-2i)^9}$, c) $\sqrt[4]{(-2+3i)^4}$, d) $\sqrt[4]{(\sqrt{3}-i)^{12}}$.

19. Rozwiązać dane równania:
    a) $\overline{z}\cdot z^4 = -32$, b) $\overline{z}\cdot z^3 + \overline{z}\cdot 8i = 0$,
    c) $(i+z)^4 = (-1-z)^4$, d) $(i-z)^4 = (z-1)^4$.

20. Wykazać, że liczba zespolona z jest pierwiastkiem n-tego stopnia z liczby rzeczywistej w wtedy i tylko wtedy, gdy takim pierwiastkiem jest liczba $\overline{z}$. Czy tak samo będzie, gdy w będzie liczbą zespoloną?

21. Obliczyć sumę oraz iloczyn wszystkich pierwiastków zespolonych n-tego stopnia z jedynki, gdzie n jest ustaloną liczbą naturalną.

22. Przedstawić w postaci wykładniczej liczby:
    a) $8i$, b) $2-2i$, c) $(-\sqrt{3}+i)^3$, d) $(1+i)^{20}$.

23. Stosując postać wykładniczą, rozwiązać dane równania:
    a) $z^3 = 8i$, b) $z^4 = -4$, c) $z^4 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,i$.
    Wynik podać w postaci algebraicznej.

24*. Korzystając z postaci trygonometrycznej lub wykładniczej, rozwiązać równania:
    a) $|z^4| = z$, b) $z^3\cdot(\overline{z})^2 = -1$, c) $z^3 = (2+2i)^6$.

25*. Stosując postać trygonometryczną lub wykładniczą, rozwiązać podane równania:
    a) $z^7 = \overline{z}$, b) $\overline{(z^5)} = z^2|z^3|$, c) $(\overline{z})^2\,|z^4| = \frac{1}{z^2}$,
    d) $|z|^4 = iz^4$, e) $z^6 = (\overline{z})^6$, f) $|z^4| = z^2$.

26*. Korzystając z postaci trygonometrycznej lub wykładniczej liczb zespolonych, wyprowadzić wzór na $cos\frac{\varphi}{2}$.

27*. Wykazać, że długość boku n-kąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu r jest równa $r\sqrt{2-2\,cos\varphi}$, gdzie $\varphi = \frac{2\pi}{n}$. Wyprowadzić na tej podstawie wzór na długość okręgu.

Wielomiany i ułamki proste

1. Nie wykonując dzielenia, znaleźć resztę z dzielenia wielomianu P przez wielomian Q:
   a) $P(x) = x^5 + x^2 + x + 1, \quad Q(x) = x^2 - 1;$
   b) $P(x) = x^7 - x^5 + x^4 + x^3 + x + 3, \quad Q(x) = x^3 - x;$
   c) $P(x) = 2x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 3x + 2, \quad Q(x) = x^2 + 1;$
   d) $P(x) = x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 5x, \quad Q(x) = x^2 - 2x + 2.$

2. Znając jeden z pierwiastków wielomianu, znaleźć pozostałe:
   a) $W(x) = x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 5x + 6, \quad x_1 = i;$
   b) $W(x) = x^4 - 5x^3 + 10x^2 - 10x + 4, \quad x_1 = 1 - i;$
   c) $W(x) = x^5 - x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 3x + 5, \quad x_1 = 1 + 2i;$
   d) $W(x) = x^5 + 8x^4 + 22x^3 - 18x^2 - 19x + 30, \quad x_1 = 2 - i.$

3. Podać przykłady wielomianów rzeczywistych najniższego stopnia, dla których liczby
   a) $2 - 2i$, $2i$ są pierwiastkami pojedynczymi, a liczba 3 jest pierwiastkiem potrójnym,
   b) $2 - i$, $1 - i$, i są pierwiastkami pojedynczymi, a liczba -1 jest pierwiastkiem podwójnym,
   c) $1 + 2i$, -3 są pierwiastkami pojedynczymi, a liczba $1 + i$ jest pierwiastkiem podwójnym.

4. Dane wielomiany przedstawić w postaci iloczynu rzeczywistych wielomianów nierozkładalnych:
   a) $P(x) = x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 6x - 4;$ b) $P(x) = x^6 - 1;$
   c) $P(x) = x^5 - 2x^2 - x + 2;$ d) $P(x) = x^4 - 81;$
   e*) $P(x) = x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1.$

5. Rozłożyć na rzeczywiste ułamki proste następujące funkcje wymierne:
   a) $\dfrac{2x^2 - 2x + 3}{(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 1)}$; b) $\dfrac{2x^3 + 3x^2 + 4x - 3}{(x^2 - 1)(x^2 + 2)}$; c) $\dfrac{5x - 12}{x^2 - 5x + 6}$; d) $\dfrac{x^3 - 8x^2 - 14x - 13}{x^4 - x^3 - 5x^2 - x - 6}$.

Zadania z geometrii analitycznej

1. Punkty $A(3, -1, 2)$, $B(1, 2, -4)$, $C(-1, 1, 2)$ są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku $ABCD$. Wyznaczyć współrzędne punktu D.

2. Czy punkty $A(3, -1, 2)$, $B(1, 2, -1)$, $C(-1, 1, -3)$, $D(3, -5, 3)$ są wierzchołkami równoległoboku?

3. Punkty $B(2, 0, 2)$ i $C(5, -2, 0)$ dzielą odcinek AD na trzy równe części. Wyznaczyć współrzędne punktów A i D.

4. Wyrazić przekątne równoległościanu rozpiętego na wektorach $\vec{u} = [1, 1, 2]$, $\vec{v} = [3, -1, 2]$, $\vec{u} = [0, 2, 3]$ przy pomocy tych wektorów.

5. Dla jakich wartości parametru $p \in R$ wektory $\vec{u} = [0, 1, 1]$ oraz $\vec{w} = [p, 2, p]$ są prostopadłe?

6. Dla jakich wartości $p \in R$ kąt między wektorami $\vec{u} = [0, 1, 1]$ oraz $\vec{w} = [p, 4, p]$ jest równy $\dfrac{\pi}{3}$?

7. Punkty $A(2, 4, 6)$, $B(0, 0, 2)$, $C(0, p, p)$ są wierzchołkami trójkąta prostokątnego o kącie prostym przy wierzchołku B. Wyznaczyć p.

8. Wykazać, że jeśli wektory $\vec{u} + \vec{v}$ oraz $\vec{u} - \vec{v}$ są prostopadłe, to wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ mają jednakową długość. Jaki jest sens geometryczny tej zależności?

9. Wykazać, że jeśli wektory $\vec{u} + \vec{v}$ oraz $\vec{u} - \vec{v}$ mają jednakową długość, to wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ są prostopadłe. Jaki jest sens geometryczny tej zależności?

10. Wykazać, że dla dowolnych niezerowych wektorów $\vec{u}$ i $\vec{w}$ prawdziwa jest równość
$$|\vec{u} - \vec{w}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{w}|^2 - 2\,|\vec{u}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos\varphi\,,$$
gdzie φ oznacza kąt między wektorami $\vec{u}$ i $\vec{w}$. Jaki jest sens geometryczny tej równości?

11. Obliczyć iloczyn skalarny wektorów $\vec{u} = -2\vec{p} + 4\vec{q}$ i $\vec{v} = 3\vec{p} + \vec{q}$, wiedząc, że kąt między wektorami $\vec{p}$ i $\vec{q}$ wynosi 60^0 oraz $|\vec{p}| = 3$, $|\vec{q}| = 2$.

12. Dla jakich wartości parametru $p \in R$ pole trójkąta o wierzchołkach w punktach $A(2,3,2)$, $B(3,5,7)$, $C(p,0,p)$ jest równe $4\sqrt{3}$?

13. Dla jakich wartości parametrów $a, b \in R$ punkty $A(0,2,1)$, $B(1,2,3)$, $C(a,b,7)$ leżą na jednej prostej?

14. Na przekątnej AC kwadratu $ABCD$ o boku długości a wyznaczono punkt P tak, że odcinki BP i PE, gdzie E jest środkiem boku AD, są prostopadłe. Jaka jest długość odcinka AP?

15. Jak zmieni się pole równoległoboku rozpiętego na wektorach $\vec{u}$ i $\vec{v}$ jeśli oba wektory zwiększą swoją długość dwukrotnie?

16. Jeden z wektorów rozpinających pewien czworościan foremny zwiększa swoją długość dwukrotnie, a drugi dwukrotnie zmniejsza. Jak zmieni się objętość czworościanu?

17. Dla jakich wartości parametru $p \in R$ objętość czworościanu $ABCD$ o wierzchołkach w punktach $A(1,0,1)$, $B(1,1,2)$, $C(2,1,1)$, $D(p,p,p)$ będzie równa 1?

18. Dla jakich wartości parametru $p \in R$ punkty $A(1,1,1)$, $B(1,1,2)$, $C(p,1,0)$, $D(2,0,p)$ leżą na jednej płaszczyźnie?

19. Znaleźć wszystkie punkty postaci $P(x,x,2)$, gdzie $x \in R$, należące do płaszczyzny zawierającej punkty $A(0,1,2)$, $B(1,2,3)$, $C(4,1,3)$.

20. Obliczyć odległość punktu $P(1,-2,5)$ od płaszczyzny przechodzącej przez punkty $A(0,-5,1)$, $B(6,3,2)$, $C(-3,-9,1)$.

21. Wyznaczyć równanie ogólne płaszczyzny przecinającej oś z w punkcie o współrzędnej $z = 1$ i zawierającej punkty $A(0,3,0)$ oraz $B(1,2,2)$.

22. Napisać równanie ogólne (i parametryczne$^+$) płaszczyzny przechodzącej przez punkty $A(3,0,0)$, $B(0,1,0)$ i prostopadłej do płaszczyzny wyznaczonej przez osie x i y.

23. Napisać równanie parametryczne prostej przechodzącej przez punkty $A(-1,1,0)$ i $B(1,5,-4)$.

24. Napisać równanie parametryczne prostej przechodzącej przez punkt $P(2,-5,0)$ i prostopadłej do płaszczyzny zadanej równaniem $x - 3z + 5 = 0$.

25. Napisać równanie parametryczne prostej przechodzącej przez punkt $P(7,2,0)$ i prostopadłej do wektorów $\vec{u} = [3,-2,-3]$, $\vec{v} = [1,2,-3]$.

26. Napisać równanie parametryczne prostej będącej częścią wspólną płaszczyzny π_1 przechodzącej przez punkty $A(1,7,8)$, $B(2,8,8)$, $C(-4,2,7)$ oraz płaszczyzny $\pi_2 : x + 2z - 4 = 0$.

27. Zbadać, czy proste $l_1 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t, \\ z = 4 + 2t \end{cases}$ oraz $l_2 : \begin{cases} x = -1 - 2s \\ y = 3 + s, \\ z = -4 - 8s \end{cases}$ gdzie $s, t \in R$, mają punkt wspólny.

28. Zbadać, czy płaszczyzna $\pi : x + y - z + 3 = 0$ oraz prosta $l : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 + 2t, \\ z = 5 + 3t \end{cases}$ $t \in R$, mają punkt wspólny.

29$^+$. Zbadać, czy prosta $l : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t, \\ z = 3 - 2t \end{cases}$ oraz płaszczyzna $\pi : \begin{cases} x = -1 + \alpha + \beta \\ y = 2 + 3\alpha - \beta, \\ z = 3 + 2\alpha + 2\beta \end{cases}$ gdzie $t, \alpha, \beta \in R$, mają punkt wspólny.

30. Znaleźć równanie ogólne płaszczyzny będącej dwusieczną kąta dwuściennego utworzonego przez płaszczyzny $\pi_1 : x - y + z = 0$ oraz $\pi_2 : 5x + y - z + 24 = 0$.

31. Wyznaczyć równanie parametryczne prostej będącej dwusieczną kąta utworzonego przez proste
$$l_1: \begin{cases} x=-1+2t \\ y=-1-t\,, \\ z=2+2t \end{cases} \quad \text{oraz} \quad l_2: \begin{cases} x=-1-4s \\ y=-1+4s\,, \\ z=2+2s \end{cases} \quad \text{gdzie } s,t\in R.$$

32. Obliczyć odległość punktu $M(6,6,3)$ od prostej $l_1: \begin{cases} x=1+2t \\ y=-1-t\,, \\ z=3-2t \end{cases} \quad t\in R.$

33. Obliczyć miarę kąta między parą prostych:

a) $l_1: \begin{cases} x+y-z+2=0 \\ x-4y+3=0 \end{cases}$ oraz $l_2: \begin{cases} x=1+t \\ y=-3+2t\,, \\ z=2+3t \end{cases} \quad t\in R,$

b) $l_3: \begin{cases} 5x-y-z+1=0 \\ 3x-z+4=0 \end{cases}$ oraz $l_4: \begin{cases} x=1+3s \\ y=-2-s\,, \\ z=2s \end{cases} \quad s\in R.$

34. Znaleźć punkt i kąt, pod jakim prosta l przecina płaszczyznę π

a) $l: \begin{cases} x=3+s \\ y=2+2s\,, \\ z=4+3s \end{cases} \quad s\in R, \quad \pi:\, 4x+y+5z-13=0\,,$

b) $l_2: \begin{cases} x=7+3t \\ y=1-t\,, \\ z=2+2t \end{cases} \quad t\in R, \quad \pi:\, x+2y+3z+3=0\,.$

35$^+$. Zbadać, czy punkt $M(1,2,1)$ leży między płaszczyznami
$$\pi_1:\, 6x-3y+6z+3=0, \qquad \pi_2:\, 4x-2y+4z-2=0.$$

36$^+$. Zbadać, czy punkty $(-2,4,3)$ i $B(1,-2,2)$ leżą po tej samej stronie płaszczyzny $\pi:\, 2x+3z-7=0.$

Zadania o krzywych stożkowych

1. Znaleźć równanie okręgu, który:

a) przechodzi przez punkty $A(3,1)$, $B(-1,1)$, $C(3,-3)$,
b) przechodzi przez punkty $A(3,1)$, $B(-1,1)$ i ma środek na prostej $y=x$.
c) przechodzi przez punkt $A(-1,-2)$ i jest styczny do osi układu współrzędnych.

2$^+$. Znaleźć równanie parametryczne prostej stycznej do okręgu $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$ w punkcie $P(x_1,x_2)$ leżącym na tym okręgu.

3. Znaleźć równanie krzywej zawierającej punkty, których odległość od punktu $P(-4,-4)$ jest trzy razy większa jak odległości od początku układu współrzędnych.

4. Znaleźć równanie krzywej zawierającej punkty, dla których suma odległości od punktów $M(-1,1)$ i $N(1,3)$ jest stała i jest równa 4.

5. Znaleźć równanie elipsy przechodzącej przez punkty $A(4,0)$, $B(0,-3)$ i mającej środek początku układu współrzędnych.

6. Wyznaczyć współrzędne środka i długości osi dla elipsy $9x^2-18x+4y^2+16y-11=0$.

7. Znaleźć równanie elipsy przechodzącej przez punkt $P(-1,0)$ i mającej ogniska w punktach $F_1(1,2)$, $F_2(5,2)$. Jaki jest mimośród tej elipsy?

8. Kiedy mimośród elipsy jest równy zero?

9. Znaleźć równanie hiperboli przechodzącej przez punkt $P(6,1)$ i mającej ogniska w punktach $F_1(-3,1)$, $F_2(7,1)$. Jaki jest mimośród tej hiperboli?

10. Wyznaczyć współrzędne wierzchołków i mimośród hiperboli $x^2-6x-9y^2-54y=153$.

11. Wyznaczyć odległość między gałęziami hiperboli $x^2 - y^2 = 1$.

12. Wyznaczyć odległość między gałęziami hiperboli $xy = 1$.

13. Wyznaczyć współrzędne ogniska i równanie kierownicy paraboli:
a) $y^2 - 4y - 4x + 8 = 0$, b) $x^2 - 6x - 8y + 49 = 0$.

Odpowiedzi do zadań o macierzach

1. a) $\begin{bmatrix} 9 & 2 & -1 \\ 2 & -9 & 1 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -6 \end{bmatrix}$; d) $\begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix}$.

2. a) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$; d) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 6 & 5 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix}$; f) $\begin{bmatrix} 24 & 44 & 38 \\ 26 & 48 & 41 \\ 7 & 13 & 11 \end{bmatrix}$; pozostałe wyrażenia nie są możliwe do obliczenia.

3. $AB = \begin{bmatrix} 9 & 20 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$; $BA = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 13 & 20 \\ 4 & 2 & 6 & 10 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$.

4. $B = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$; $C = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -3 \\ -4 & -3 & 1 \end{bmatrix}$.

5. $\begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix}$, gdzie x, y, z są dowolne.

7. a) $\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

8. a) $\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{bmatrix}$, x dowolne; c) nie ma takiej macierzy; d) nie ma takiej macierzy;
e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

9. a) $\begin{bmatrix} 1-x \\ -1 \\ x \end{bmatrix}$, gdzie x dowolne; b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$; d) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$; e) nie ma takiej macierzy.

10. $X = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$, $Y = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

11. a) $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -\frac{1}{3} & -1 \end{bmatrix}$;
c) nie ma takiej macierzy.

12. $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ x & 0 \end{bmatrix}$, gdzie x jest dowolny.

13. a) $A^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; b) $B^n = \begin{bmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{bmatrix}$; c) $C^n = \begin{bmatrix} \cos nx & \sin nx & 0 \\ -\sin nx & \cos nx & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

15. $X = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & -4 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -8 & 4 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$.

17. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Kadą kwadratową.

18. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

19. $X = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ x & y \\ -x & 1-y \end{bmatrix}$, gdzie x, y dowolne.

20. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$; $C^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \\ -10 & -25 & -14 \end{bmatrix}$; D^{-1} nie istnieje.

21. $\begin{bmatrix} 1 & 9 & 9 & 8 \\ 1 & 9 & 9 & 9 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

22. a) $\begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 3 & -9 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Odpowiedzi do zadań o wyznacznikach

1. a) -90; b) 3; c) -2.
2. $x = 0$.
3. a) 85; b) -4; c) -27; e) 0.
4. $\det C = \det D = \det A \cdot \det B = 100$.
5. a) 1; b) 4.
6. a) 1080; b) 4.
7. $x(x-y)^5$.
8. a) 128, b) 1.
9. Nie. Dla n parzystego tak, dla nieparzystego – nie.
12. Nie. Odpowiedź twierdząca tylko gdy $\det S \neq 0$.
13. $\det A = 0$ lub $\det A = 1$.
15. W drugim wyznaczniku należy od każdego wiersza odjąć pierwszy. Następnie od trzeciego odjąć nowy drugi pomnożony przez dwa itd. aż otrzymamy dwa proporcjonalne wiersze.
16. a) $x \neq k\pi,\ \ k \in Z$; b) $x^2 \neq y^2$; c) $x \neq 0$.

17. $X = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\quad Y = \begin{bmatrix} -17 & 23 & 12 \\ -5 & 8 & 4 \\ -17 & 21 & 11 \end{bmatrix}$.

18. a) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{bmatrix}$; b) nie istnieje; c) $\begin{bmatrix} 5 & -2 & -5 & 4 \\ -7 & 3 & 16 & -13 \\ 0 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & -11 & 9 \end{bmatrix}$; d) $\begin{bmatrix} -7 & 5 & 12 & -19 \\ 3 & -2 & -5 & 8 \\ 41 & -30 & -69 & 111 \\ -59 & 43 & 99 & -159 \end{bmatrix}$.

19. a) $0, 1, 2, ..., n-1$; b) $1, 2, 3, ..., n-1, \frac{n(1-n)}{2}$.
20. a) $(-1)^n$; b) 0; c) $n+1$; d) $\frac{n(n+1)}{2}\, n!$.

Odpowiedzi do zadań o układach równań

1. a) Układ sprzeczny; b) $x = 1-z,\ y = 2-z$, gdzie z dowolny; c) układ sprzeczny;
d) $x_1 = 1 - x_2,\ x_3 = -2x_2,\ x_4 = 1 + 3x_2$, gdzie x_2 dowolny; e) $x = 4,\ y = -1,\ z = 1$;
f) $x_1 = 2 + x_3 + x_4,\ x_2 = 1 + x_3 + x_4,\ \ x_3, x_4$ dowolne; g) $x = 3 + z + u,\ y = 2 + u,\ \ u, z$ dowolne;
h) układ sprzeczny.
3. a) $p \neq -4,\ p \neq 1$; b) dla żadnego; c) $p \neq -2,\ p \neq 2$; d) dla każdego $p \in R$.
4. a) $x = y = z = 1$; b) $x = 1,\ y = 2,\ z = 3$.
5. a) $y = -2$; b) $y = 3$.

7. a) $X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$; b) $X_1 = \begin{bmatrix} -1+t \\ 1-t \\ t \end{bmatrix}$, gdzie t jest dowolne, drugi układ jest sprzeczny.

8. a) $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$; b) $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; c) $C^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & -1 \\ -1/2 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$.

10. a) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$; d) $\begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 & 0 \\ -7 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & 9 \end{bmatrix}$.

11. a) 3; b) 3; c) 3.

12. a) 2 dla $p = 3$, 3 dla $p \neq 3$; b) 2 dla $p = 0$, 3 dla $p \neq 0$; c) 3 dla $p = -3$ oraz $p = 3$, dla pozostałych wartości p rząd jest równy 4; d) 1 dla $p = 1$, 4 dla $p \neq 1$.

13. a) Nie; b) tak.

14. a) Dla każdego $p \in R$; b) dla $p \neq 5$.

15. a) Nieskończenie wiele, dwie zmienne wolne; b) nieskończenie wiele, jedna zmienna wolna; c) dokładnie jedno rozwiązanie.

16. a) Dla $p = 8$ nieskończenie wiele rozwiązań, dwie zmienne wolne; dla $p \neq 8$ nieskończenie wiele rozwiązań, jedna zmienna wolna;

b) dla $(p-1)(p+2) \neq 0$ dokładnie jedno rozwiązanie, dla $p = 1$ nieskończenie wiele rozwiązań, dwie zmienne wolne, dla $p = -2$ układ sprzeczny;

c) dla $(p-1)(p+2) \neq 0$ dokładnie jedno rozwiązanie, dla $(p-1)(p+2) = 0$ układ sprzeczny.

17. a) Dla $p = 1$ układ sprzeczny, dla $p \neq 1$, $x = \dfrac{p+1}{5p-5}$, $y = \dfrac{3p-2}{5p-5}$, $z = \dfrac{p-2}{p-1}$;

b) dla $p \neq 0$, $x = 1 - p$, $y = p$, $z = 0$, dla $p = 0$ $x = 1$, $z = 0$, y dowolny;

c) dla $p(p-1) \neq 0$ $x = \dfrac{p^2 + 4p - 15}{p^2}$, $y = \dfrac{p^2 + p + 15}{p^2}$, $z = \dfrac{-4p^2 + p + 15}{p^2}$,
dla $p = 1$ $x = 2 - z$, $y = -7 + 2z$, gdzie z dowolny, dla $p = 0$ układ sprzeczny;

d) dla $p(p+1) \neq 0$ $x = 0$, $y = \dfrac{1}{p}$, $z = -1$, dla $p = -1$ $x = 1 + z$, $y = z$, gdzie z dowolny, dla $p = 0$ układ sprzeczny.

18. a) Układ sprzeczny,; b) $x = 11 + 8y + 4z$, $t = -6 - 5y + 3z$, gdzie y, z dowolne;

c) $y = 5 - 3x - 17z - 5u$, $s = -1 - 3x + 9z - 2u$, $t = 2 - x - 6z - u$, gdzie x, z, u dowolne.

19. 23 kury i 12 szczurów.

20. Powierzchnia pokoju $25{,}2\, m^2$, 1200 klepek.

21. 1, 2, 3, 4 zł.

22. a) $y = x^2 - 5x + 3$, b) nie ma takiej paraboli.

23. Nie, gdyż magazynier kłamie (układ jest sprzeczny).

Odpowiedzi do zadań o liczbach zespolonych

1. a) $x = 2$, $y = 1$; b) $x = 3$, $y = 1$; c) $x = 1$, $y = 6$; d) nie ma takich liczb; e) $x = 3$, $y = 1$; f) $x = 2$, $y = 0$.

2. a) $2 - 5i$; b) $2 - 5i$; c) 2, $-2 + 4i$, $-2 - 4i$.

3. a) $z = 2 + i$, $u = 2 - i$; b) $z = 1 + i$, $u = i$.

4. $z_1 = x + 0i$, $z_2 = 0 + yi$, $x, y \in R$.

5. a) 0, 1, $-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $-\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; b) 0, 1, -1, i, $-i$; c) $z = x$, $z = yi$, $x, y \in R$.

6. $z_4 = -1 + i$.

7. a) Półpłaszczyzna $Im\, z \geqslant -1$;

b) pierwsza i trzecia ćwiartka układu współrzędnych bez osi układu;

c) oś rzeczywista;

d) koło (razem z okręgem ograniczającym) o promieniu 3 i środku w początku układu;

e) koło o promieniu 4 i środku w $z = -i$, bez brzegu i środka okręgu;

f) okrąg o środku w $-\frac{1}{2}$ i promieniu $\frac{1}{2}$, ale bez punktu $z = -1$.

8. a) $3\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$; b) $6\left(\cos\dfrac{11\pi}{6} + i\sin\dfrac{11\pi}{6}\right)$; c) $10\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

9. $\overline{z} = |z|\left(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)\right)$.

10. a) $-2^{15}i$; b) -4^{30}; c) -1; d) $-32i$; e) $2 - 2i$; f) i.

12. $15 - 15i$.

13. $\dfrac{\pi}{2}$.

14. a) Część płaszczyzny leżąca po lewej stronie osi $Im\, z$, razem z dodatnią częścią tej osi, ale bez początku układu.

b) część płaszczyzny zawarta między ujemną częścią osi $Im\, z$, a półprostą wychodzącą z początku układu i przechodzącą przez punkt $z = -1 - \sqrt{3}\, i$, razem z tą półprostą, a ujemną częścią osi $Im\, z$, ale bez początku układu;
c) fragment koła o środku w punkcie $z_0 = 3$ i promieniu 5, bez fragmentu należącego do koła o promieniu 3 i środku w punkcie $w_0 = -1 - 2i$; linia brzegowa otrzymanego fragmentu nie należy do rozwiązania;
d) płaszczyzna zespolona bez drugiej ćwiartki oraz fragmentów układu współrzędnych ograniczających tę ćwiartkę;
e) fragment koła o promieniu 6 i środku w punkcie $z_0 = -4$ leżący w drugiej ćwiartce układu współrzędnych, bez osi układu, ale z fragmentem okręgu ograniczającego to koło;
f) połowa koła o promieniu 2 i środku w punkcie $z_0 = -2i$ leżąca w czwartej ćwiartce układu współrzędnych, bez brzegu ograniczającego ten obszar.

16. a) $\left\{-\sqrt{3} - i,\, 1 - \sqrt{3}\, i,\, \sqrt{3} + i\right\}$; b) $\left\{1 - \sqrt{3} - 2i,\, 3 - \sqrt{3}\, i,\, 1 + \sqrt{3} + 2i\right\}$;
c) $\left\{4 - \sqrt{3} - 3i,\, 7 + 2i - \sqrt{3}\, i,\, 2 + \sqrt{3} + 5i\right\}$.

17. a) $\{5 + 6i, -5 - 6i\}$; b) $\left\{-i,\, \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\, i,\, -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\, i\right\}$; c) $\{1 + i,\, -1 + i,\, -1 - i,\, 1 - i\}$.

18. a) $\{9 - 40i, -9 + 40i\}$; b) $\left\{-16(1 + i),\, 8\left(1 + \sqrt{3} + (1 - \sqrt{3})i\right),\, 8\left(1 - \sqrt{3} + (1 + \sqrt{3})i\right)\right\}$;
c) $\{-2 + 3i,\, -3 - 2i,\, 2 - 3i,\, 3 + 2i\}$; d) $\{8,\, 8i,\, -8,\, -8i\}$.

19. a) $1 + \sqrt{3}\, i,\, -2,\, 1 - \sqrt{3}\, i$; b) $2i,\, -\sqrt{3} - i,\, \sqrt{3} - i$; c) $0,\, -1 - i,\, -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\, i$; d) $0,\, 1 + i,\, \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\, i$.

21. Suma 0, iloczyn 1 dla nieparzystych n oraz -1 dla n parzystych.

22. a) $8e^{i\frac{\pi}{2}}$; b) $2\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}}$; c) $8e^{i\frac{\pi}{2}}$; d) $2^{10}e^{i\pi}$.

23. a) $-2i,\, -\sqrt{3} + i,\, \sqrt{3} + i$; b) $1 + 1, 1 + i,\, -1 - i,\, 1 - i$; c) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i,\, -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i,\, -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i,\, \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i$.

24. a) 0, 1; b) -1; c) $8i,\, 4\sqrt{3} - 4i,\, -4\sqrt{3} - 4i$.

25. a) $0,\, 1,\, \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i,\, i,\, -\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i,\, -1,\, -\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i,\, -i,\, \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$;
b) suma czterech prostych zawierających osie układu współrzędnych oraz przekątne poszczególnych ćwiartek;
c) okrąg o środku w początku układu i promieniu 1;
d) dwie prostopadłe proste przechodzące przez początek układu współrzędnych z których jedna jest nachy–lonych do dodatniej części osi rzeczywistej pod kątem $\dfrac{3\pi}{8}$;
e) suma sześciu prostych przecinających się w początku układu współrzędnych, obu osi oraz czterech pro–stych nachylonych do tych osi pod kątami $\dfrac{\pi}{6}$ oraz $\dfrac{\pi}{3}$;
f) $-1, 0, 1$.

Odpowiedzi do zadań o wielomianach i ułamkach prostych

1. a) $R(x) = 2x + 2$; b) $R(x) = x^2 + 2x + 3$; c) $R(x) = 3x + 2$; d) $R(x) = -x + 4$.

2. a) $-i,\, 2,\, 3$; b) $1 + i,\, 1,\, 2$; c) $1 - 2i,\, -i,\, i,\, -1$; d) $2 + i,\, -1,\, 2,\, 3$.

3. a) $(x^2 - 4x + 8)(x^2 + 4)(x - 3)^3$; b) $(x^2 - 4x + 5)(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 1)(x + 1)^2$;
c) $(x^2 - 2x + 5)(x + 3)(x^2 - 2x + 2)^2$.

4. a) $(x^2 - 2x + 2)(x^2 + x + 2)(x - 1)$; b) $(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)(x - 1)(x + 1)$; c) $(x^2 + x + 2)(x - 1)^2(x + 1)$;
d) $(x^2 + 9)(x + 3)(x - 3)$; e) $(x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 1)(x - 1)(x + 1)$.

5. a) $\dfrac{1}{x^2 + 1} + \dfrac{1}{x^2 - 2x + 2}$; b) $\dfrac{1}{x - 1} + \dfrac{1}{x + 1} + \dfrac{3}{x^2 + 2}$; c) $\dfrac{2}{x - 2} + \dfrac{3}{x - 3}$; d) $\dfrac{1}{x + 2} + \dfrac{-2}{x - 3} + \dfrac{2x + 1}{x^2 + 1}$.

Odpowiedzi do zadań z geometrii

1. $D(1, -2, 8)$.
2. Nie.
3. $A(-1, 2, 4)$, $B(8, -4, -2)$.
4. $[2, 0, 3]$, $[4, -2, 1]$, $[4, 2, 7]$, $[-2, 4, 3]$.
5. Dla $p = -2$.

6. Dla $p=-1$.
7. $p=1$.
11. -8.
12. Dla $p=0$ lub $p=4$.
13. Dla $a=3$, $b=2$.
14. 0 lub $\frac{3}{4}\sqrt{2}a$.
15. Pole zwiększy się czterokrotnie.
16. Nie ulegnie zmianie.
17. Dla $p=-4$ lub $p=8$.
18. Dla $p=1$.
19. $P(\frac{3}{4},\frac{3}{4},2)$.
20. 1.
21. $5x-y-3z+3=0$.
22. $x+3y-3=0$, $\begin{cases} x=3s \\ y=1-s\,, \quad s,t\in R. \\ z=t \end{cases}$
23. $\begin{cases} x=-1+t \\ y=1+2t\,, \quad t\in R. \\ z=-2t \end{cases}$
24. $\begin{cases} x=2+t \\ y=-5\,, \quad t\in R. \\ z=-3t \end{cases}$
25. $\begin{cases} x=7+6t \\ y=2+3t\,, \quad t\in R. \\ z=4t \end{cases}$
26. $\begin{cases} x=4-t \\ y=10-2t\,, \quad t\in R. \\ z=t \end{cases}$
27. Tak, $P(1,2,4)$.
28. Nie.
29. Tak, $P(0,2,5)$.
30. Są dwie takie płaszczyzny: $\pi_1' : x+2y-2z+12=0$ oraz $\pi_2' : 4x-y+z-12=0$.
31. $l_1 : \begin{cases} x=-1 \\ y=-1+t\,, \quad t\in R \\ z=2+3t \end{cases}$ oraz $l_2 : \begin{cases} x=-1+4t \\ y=-1-3t\,, \quad t\in R \\ z=2+t \end{cases}$
32. $\sqrt{73}$.
33. a) $\frac{\pi}{6}$; , b) $\frac{\pi}{3}$.
34. a) $A(2,0,1)$, $\varphi=\frac{\pi}{3}$; b) $B(1,1-2)$, $\varphi=\frac{\pi}{6}$.
35. Nie.
36. Nie.

Odpowiedzi do zadań o krzywych stożkowych

1. a) $(x-1)^2+(y+1)^2=8$; b) $(x-1)^2+(y-1)^2=4$; c) $(x+1)^2+(y+1)^2=1$, $(x+5)^2+(y+5)^2=25$.
3. $(x-1)^2+(y-1)^2=18$.
4. $\frac{x^2}{4}+\frac{(y-2)^2}{2}=1$.
5. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$.
6. $\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y+2)^2}{9}=1$, środek $(P(1,-2)$, osie 4 i 6.
7. $\frac{(x-4)^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{16}=1$, $\varepsilon=0,3$.
9. $\frac{(x-2)^2}{16}-\frac{(y-1)^2}{9}=1$, $\varepsilon=\frac{5}{4}$.
10. $\frac{(x-3)^2}{81}-\frac{(y+3)^2}{9}=1$, $W_1(-6,-3)$, $W_2(12,-3)$, $\varepsilon=\frac{\sqrt{10}}{3}$.
11. 2.
12. $2\sqrt{2}$.
13. a) $x=0$, $F(2,2)$; b) $y=3$, $F(3,8)$.