

$$\begin{cases} (4-a)x & 2y & -z & = 1 \\ -2x & (1-a)y & 2x & = 2 \\ -x & 2y & (4-a)x & = 1 \end{cases}$$

Aby przedyskutować ilość rozwiązań w zależności od parametru  $a$  policzmy w 1 kolejności wyznacznik macierzy współczynników w zależności od parametru.

Aby nie zakopać się w obliczeniach(-:)) w tym wypadku skorzystamy z metody Sarrusa.

$$\begin{vmatrix} 4-a & 2 & -1 \\ -2 & 1-a & 2 \\ -1 & 2 & 4-a \end{vmatrix} = \\ = (1-a)(4-a)^2 + 4-4 - (1-a) - 4(4-a) + 4(4-a) = (1-a)((4-a)^2 - 1) = \\ = (1-a)(4-a-1)(4-a+1) = (1-a)(3-a)(5-a)$$

Oczywiście metoda rozwinięcia Laplace'a powinna nas doprowadzić do tych samych wniosków.

Z powyższych obliczeń wynika, że wyznacznik macierzy jest różny od zera, gdy  $a \neq 1, 3, 5$ . Jeśli wyznacznik jest różny od zera, rząd macierzy  $r(A) = r(A|B)$  (jest równy rzędowi macierzy rozszerzonej) i jednocześnie jest równy liczbie parametrów. Z tego wynika, że układ równań jest oznaczony - ma 1 rozwiązanie.

Rozważmy pozostałe przypadki.

1. Gdy  $a = 1$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & | & 1 \\ -2 & 0 & 2 & | & 2 \\ -1 & 2 & 3 & | & 1 \end{bmatrix} = w_3 - 2w_2 \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & | & 1 \\ -2 & 0 & 2 & | & 2 \\ 3 & 2 & -1 & | & -3 \end{bmatrix} = w_3 - w_1 \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & | & 1 \\ -2 & 0 & 2 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & | & -4 \end{bmatrix}$$

Stąd wynika, że układ jest sprzeczny.

2. Gdy  $a = 3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ -2 & -2 & 2 & | & 2 \\ -1 & 2 & 1 & | & 1 \end{bmatrix} = w_2 + 2w_1, w_3 + w_1 \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & 2 & 0 & | & 4 \\ 0 & 4 & 0 & | & 2 \end{bmatrix} = w_3 - 2w_2 \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & 2 & 0 & | & 4 \\ 0 & 0 & 0 & | & -6 \end{bmatrix}$$

Stąd wynika, że układ jest sprzeczny.

3. Gdy  $a = 5$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & | & 1 \\ -2 & -4 & 2 & | & 2 \\ -1 & 2 & -1 & | & 1 \end{bmatrix} = w_2 - 2w_1, w_3 - w_1 \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & -8 & 4 & | & 4 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Rząd macierzy rozszerzonej = 2, rząd macierzy współczynników = 2. Układ równań jest nieoznaczony, ma nieskończenie wiele parametrów zależnych od 1 parametru.