

Analiza Matematyczna I

Lista 0 (wstępna)

Zad. 1. Wykazać, że wartość bezwzględna liczby rzeczywistej ma następujące własności dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$:

- a) $|x| = |-x|$;
- b) $-|x| \leq x \leq |x|$;
- c) $|x| \leq y \Leftrightarrow -y \leq x \leq y$ gdy $y \geq 0$;
- d) $|x + y| \leq |x| + |y|$;
- e) $|xy| = |x||y|$;
- f) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ gdy $y \neq 0$;
- g) $||x| - |y|| \leq |x - y|$;
- h) $|x| - |y| \leq |x - y| \leq |x| + |y|$;
- i) $|x^n - y^n| \leq nM^{n-1}|x - y|$ dla $M = \max\{|x|, |y|\}$.

Zad. 2. Wyznaczyć liczbę rzeczywistych pierwiastków równania $x \cdot |x| = x + c$ w zależności od parametru rzeczywistego c .

Zad. 3. Określić liczbę rozwiązań rzeczywistych równania

$$(m - 1)x^4 - (2m - 1)x^2 + m - \frac{1}{4} = 0$$

w zależności od parametru rzeczywistego m . Pokazać, że w przypadku kiedy równanie ma cztery rozwiązania, to są one postaci

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{2\sqrt{m} + 1}{2\sqrt{m} + 2}}, \quad x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{2\sqrt{m} - 1}{2\sqrt{m} - 2}}.$$

Zad. 4. Rozstrzygnąć która z liczb jest większa:

- a) $2^{\log_3 243}$ czy $4^{2 + \log_2(3/2)}$;
- b) $\log_2 5$ czy $\log_3 16$;
- c) $\log 5 \cdot \log 20 + (\log 2)^2$ czy $\sqrt{6 - 2\sqrt{5}}$.

Zad. 5. Rozwiązać następujące równania i nierówności:

- a) $\log x + \log(x + 3) = 1$;
- b) $3^{x^2 - 2x} = \frac{1}{3}$;
- c) $\log_x y = \log_y x$ i $x + y = 3$;
- d) $\log_x(1 + x) < 1$;
- e) $|\log_x(x + 1)| + |\log_x(x - \frac{1}{2})| \geq 1$;
- f) $\log_x(5x - 1) \leq \log_x(7x - 2)$;
- g) $|\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x| = \frac{4}{\sqrt{3}}$;

- h) $\log_{\sin x} \cos x + \log_{\cos x} \sin x = 2$;
- i) $|\sin x| > |\cos x|$;
- j) $\frac{\cos 2x + \cos x - 1}{\cos 2x} > 2$.

Zad. 6. Wykazać, że liczby $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{3} - \sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2} - \sqrt{2}$, $\log_2 3$, $\log_{10} 17$ są liczbami niewymiernymi.

Zad. 7. Jakimi liczbami (wymiernymi czy niewymiernymi) są poniższe liczby:

$$\sqrt{3 - \sqrt{8}} - \sqrt{2}, \quad \sqrt{3 - \sqrt{8}} + 1, \quad \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} + \sqrt{4 - 2\sqrt{3}},$$

$$\sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}}, \quad \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} - \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} \quad ?$$