Analiza Matematyczna I

Lista 4

Zad. 1. Obliczyć lub wykazać, że nie istnieją następujące granice:

- a) $\lim\limits_{x\to a} \frac{\cos x - \cos a}{\sin x - \sin a}$;
- b) $\lim\limits_{x\to -1} (x+1)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$;
- c) $\lim\limits_{x\to +\infty} (\sqrt{x^2+6x} - x)$;
- d) $\lim\limits_{x\to -\infty} (\sqrt{x^2+6x} + x)$;
- e) $\lim\limits_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right]$;
- f) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\operatorname{tg}(\sqrt{x}-1)}{\sin(x-1)}$;
- g) $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{2-\cos x}$;
- h) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{1/x}+1}{e^{1/x}-1}$;
- i) $\lim\limits_{x\to 8} \frac{\sqrt{x+1}-3}{\sqrt[3]{x}-2}$.

Zad. 2. Korzystając z własności funkcji wykładniczych i odpowiedniej definicji granicy funkcji wykazać, że

$$\lim_{x\to +\infty} a^x = +\infty, \quad \text{gdy } a > 1.$$

Wywnioskować stąd wartości granic

- a) $\lim\limits_{x\to +\infty} a^x$ dla $0 < a < 1$;
- b) $\lim\limits_{x\to -\infty} a^x$ dla dowolnego $a > 0$.

Zad. 3. Korzystając z własności funkcji logarytmicznych i odpowiedniej definicji granicy funkcji wykazać, że

$$\lim_{x\to +\infty} \log_a x = +\infty, \quad \text{gdy } a > 1.$$

Wywnioskować stąd wartości granic

- a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \log_a x$ dla $0 < a < 1$;
- b) $\lim\limits_{x\to 0+} \log_a x$ dla dowolnego $a > 0$ i $a \neq 1$.

Zad. 4. Wiedząc, że

$$\lim_{x\to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e,$$

obliczyć granice

- a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$;
- b) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

Zad. 5. Zbadać ciągłość następujących funkcji dla $\alpha \in \mathbb{R}$:

- a)
$$f_\alpha(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin x^2 & x \neq 0; \\ 0 & x = 0; \end{cases}$$
- b)
$$g(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q}; \\ 0 & x \notin \mathbb{Q}; \end{cases}$$
- c)
$$h_\alpha(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[5]{x}-1}{\sqrt{x}-1} & x \neq 1; \\ \alpha & x = 1. \end{cases}$$

Zad. 6. Załóżmy, że funkcje $f, g : D \to \mathbb{R}$ są ciągłe. Wykazać, że funkcja $h : D \to \mathbb{R}$ określona warunkiem $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ dla wszystkich $x \in D$ jest również ciągła. Jak stąd wywnioskować, że $|f|$ jest funkcją ciągłą?

Zad. 7. Załóżmy, że funkcje $f, g : I \to \mathbb{R}$, gdzie I jest przedziałem, są ciągłe i $f(x) = g(x)$ dla dowolnego $x \in \mathbb{Q} \cap I$. Wykazać, że $f(x) = g(x)$ dla dowolnego $x \in I$.

Zad. 8. Udowodnić, że funkcja liniowa $f(x) = ax$ dla $x \in \mathbb{R}$, jest jedyną funkcją ciągłą na $\mathbb{R}$ spełniającą warunki $f(1) = a$ oraz $f(x+y) = f(x) + f(y)$ dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$.

Zad. 9. Niech $f : [a, b] \to [a, b]$ będzie funkcją ciągłą. Pokazać, że istnieje punkt $c \in [a, b]$ taki, że $f(c) = c$.

Zad. 10. Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcję ciągłą i niech $f(x) > 0$ dla wszystkich $x \in [a, b]$. Dowieść, że istnieje liczba rzeczywista $p > 0$ taka, że $f(x) > p$ dla każdego $x \in [a, b]$.

Zad. 11. Niech $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Załóżmy, że istnieje skończona granica $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Udowodnić, że funkcja f jest ograniczona.

Zad. 12. Dla podanej niżej funkcji f wyznaczyć jej obraz, sprawdzić ciągłość i różnowartościowość. Znaleźć funkcję do niej odwrotną f^{-1}, jeśli istnieje.

- a) $f(x) = \frac{x}{1-x}$, $D_f = (-\infty, 1)$;
- b) $f(x) = \arccos(e^x - 2)$, D_f jest dziedziną naturalną funkcji g.

Zad. 13. Na przykładzie funkcji $f(x) = (1 + x^2) \cdot$ sgn x, $x \in \mathbb{R}$ wykazać, że funkcja odwrotna do funkcji nieciągłej może być ciągła. Przypomnijmy, że funkcja sgn jest określona następująco: sgn $x = 1$, gdy $x > 0$, sgn $x = -1$, gdy $x < 0$ i sgn $0 = 0$.

Zad. 14. Sprawdzić czy funkcja f jest ciągła jednostajnie na podanym przedziale, jeśli

- a) $f(x) = [x] \sin \pi x$, $[a, b]$;
- b) $f(x) = \sin \frac{1}{x}$, $(0, 1]$;
- c) $f(x) = \sqrt{x}$, $[0, +\infty)$.

Zad. 15. Niech $f : D \to +\infty$, $D \subset \mathbb{R}$, będzie funkcją jednostajnie ciągłą na D. Pokazać, że jeśli (x_n) jest ciągiem Cauchy'ego punktów zbioru D, to $(f(x_n))$ też jest ciągiem Cauchy'ego.

Zad. 16. Funkcja $f : (0, \infty) \to +\infty$ jest jednostajnie ciągła na $(0, \infty)$. Czy stąd wynika istnienie granic $\lim_{x \to 0+} f(x)$ i $\lim_{x \to +\infty} f(x)$?

Zad. 17. Korzystając tylko z definicji występujących funkcji, udowodnić następujące tożsamości:

- a) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ dla $-1 \le x \le 1$;
- b) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$ dla $x \in \mathbb{R}$.

Zad. 18. Korzystając z Zad. 4 pokazać, że

- a) $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$;
- b) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

Zad. 19. Uzasadnić, że podane równania mają rozwiązania leżące we wskazanych przedziałach

- a) $x \operatorname{arctg} x - 1 = 0$, $(1, \sqrt{2})$;
- b) $x^2 2^x = 1$, $\mathbb{R}$, tutaj chodzi o rozwiązanie inne niż $x = -2$;
- c) $(1 - x) \cos x = \sin x$, $(0, 1)$.

Ile jest takich rozwiązań?

Zad. 20. Podać przykład funkcji określonej i mającej własność Darboux na przedziale domkniętym, ale niebędącej funkcją ciągłą.

Zad. 21. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą i różnowartościową. Wykazać, że f jest w całej swojej dziedzinie albo funkcją rosnącą albo malejącą.