Procesy stochastyczne

Lista 1

We wszystkich zadaniach $N = (N_t)_t$ to proces Poissona o intensywności λ; $B = (B_t)_t$ to standardowy ruch Browna.

Zadania oznaczone **T** są trudniejsze.

Proces Poissona jako proces liczący Niech $T_1, T_2, \ldots$ będą i.i.d. zmiennymi z rozkładu wykładniczego o średniej $\mathbb{E}[T_k] = 1/\lambda$. Zmienne

$$S_k := \sum_{j=1}^{k} T_j$$

interpretujemy jako moment wystąpienia k-tego zdarzenia w pewnym zjawisku. Proces Poissona definiujemy jako ilość zdarzeń do momentu t,

$$N_t := \#\{k \colon S_k \leq t\}.$$

Proces Poissona jako proces Lévy'ego Równoważnie, proces Poissona możemy zdefiniować jako jedyny proces spełniający poniższe cztery własności:

1. $N_0 = 0$,
2. N ma stacjonarne i niezależne przyrosty,
3. dla każdego t wartość procesu ma rozkład Poissona, $N_t \sim \mathcal{P}oiss(\lambda t)$,
4. ma trajektorie prawostronnie ciągłe.

Zad. 1. Znajdź

a) $\mathbb{E}[S_4]$,

b) $\mathbb{E}[N_4 - N_2 | N_1 = 3]$,

c) $\mathbb{E}[N_4 + N_2 | N_1 = 3]$.

Zad. 2. **T** Oblicz $\mathbb{E}[S_4 | N_1 = 2]$.

Zad. 3. Załóżmy, że klienci pojawiają się z prędkością 2 osób na minutę. Jakie jest prawdopodobieństwo, że liczba klientów, która przyszła w ciągu 2 minut wynosi

a) dokładnie 3,

b) co najwyżej 3,

c) co najmniej 3?

Zad. 4. Niech proces Poissona N będzie niezależny od ciągu i.i.d. zmiennych losowych $X_1, X_2, \ldots$ ze średnią μ i wariancją σ^2. Znajdź

$$\mathrm{Cov}\left(N_t, \sum_{i=1}^{N_t} X_i\right).$$

Zad. 5. Oblicz $\mathrm{P}(N_1 = 1, N_2 = 4, N_4 = 5)$.

Zad. 6. Oblicz $\mathbb{E}\, \mathrm{e}^{wN_t}$, $\mathrm{P}(N_1 \le N_3)$ i $\mathrm{P}(N_1 < N_3)$.

Zad. 7. Klienci przychodzą do banku zgodnie z procesem Poissona o intensywności λ $[h^{-1}]$. Przypuśćmy, że dwóch klientów przybyło w ciągu pierwszej godziny. Jakie jest prawdopodobieństwo, że przybyli w ciągu pierwszych dwudziestu minut?

Zad. 8. Używając definicji procesu Poissona jako procesu o niezależnych poissonowskich przyrostach wyprowadź, że czas oczekiwania na jego pierwsze zdarzenie ma rozkład wykładniczy.

Zad. 9. **T** (Paradoks inspekcji) Dla ustalonego $t > 0$ niech A_t czasem jaki upłynął od ostatniego zdarzenia procesu N_t zaś C_t czasem jaki należy czekać do następnego zdarzenia. Znajdź $\mathbb{E}[A_t + C_t]$. Co można powiedzieć o tym wyniku?

Zad. 10. Samochody jadą dwoma drogami zgodnie z rozkładem Poissona o częstotliwościach odpowiednio 3 i 5 na minutę. Oblicz oczekiwana długość czasu po którym przez ich skrzyżowanie przejedzie 100 samochodów.

Zad. 11. Dla $s \ge t$ oraz $s < t$ i liczby naturalnej n znajdź $v(n) = \mathbb{E}[N_s | N_t = n]$ oraz $\mathbb{E}[N_s | N_t]$.

Martyngały Niech $(\mathcal{F}_t)_t$ będzie filtracją, tzn. wstępującą rodziną σ-ciał. Proces stochastyczny X nazywamy martyngałem względem $\mathcal{F}$, kiedy jest:

1. procesem L^1, tzn. $\mathbb{E}|X_t| < \infty$ dla każdego t,
2. dla każdego $s \leq t$ zachodzi $\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s] = X_s$.

Domyślną filtracją jest filtracja naturalna procesu $\mathcal{F}^X$, tzn. złożona z σ-ciał zawierających informację o procesie do momentu t, $\mathcal{F}_t^X := \sigma(\{X_s \colon s \leq t\})$. Jeżeli nie wymieniamy wprost filtracji, to przyjmujemy, że mamy do czynienia z martyngałem względem swojej filtracji naturalnej.

Submartyngały i supermartyngały Jeżeli w 2. zamiast równości zachodzi nierówność $\geq$ lub $\leq$ to mówimy odpowiednio o sub- lub supermartyngale względem $\mathcal{F}$.

Fakt 1 Jeżeli czas jest dyskretny, tzn. $t = k \in \{1, 2, 3, 3, \ldots\}$, to warunek 2. można zastąpić prostszym

$$\mathbb{E}[X_{k+1}|\mathcal{F}_k] = X_k.$$

Fakt 2 Jeżeli X jest martyngałem względem filtracji $\mathcal{G}$ silniejszej niż filtracja $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{G}_t$, to jest też martyngałem względem filtracji $\mathcal{F}$.

Zad. 12. Udowodnij Fakt 1.

Zad. 13. Udowodnij Fakt 2.

Zad. 14. Udowodnij, że $N_t - \lambda t$ jest martyngałem względem $\mathcal{F}^N$.

Zad. 15. Załóżmy, że M jest martyngałem. Pokaż, że

$$\mathbb{E}[M_t] = \mathbb{E}[M_0].$$

Zad. 16. Niech M będzie martyngałem. Udowodnij, że M ma nieskorelowane przyrosty:

$$\mathrm{Cov}(M_t - M_s, M_v - M_u) = 0$$

dla $s < t < u < v$.

Zad. 17. Dla martyngału $(Z_n)_n, n \in \mathbb{N}$ niech $X_i = Z_i - Z_{i-1}$, $i \geq 1$, gdzie $Z_0 = 0$. Udowodnij, że

$$\mathrm{Var}(Z_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i).$$

Zad. 18. Niech X będzie pewnym procesem losowym o wartościach w $\mathbb{R}$. Co możemy powiedzieć o relacjach między filtracjami naturalnymi $\mathcal{F}^X, \mathcal{F}^U$, $\mathcal{F}^W, \mathcal{F}^Y, \mathcal{F}^Z$ procesów $U_t = X_t + t, W_t = X_t^2, Y_t = \sin(X_t^2), Z_t = \exp(X_t)$. Które są słabsze, a które silniejsze?

Zad. 19. Wykaż, że jeśli $X_1, X_2, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi i $\mathbb{E}X_i = 0$, to ciąg $S_n := X_1 + \ldots + X_n$, jest martyngałem.

Zad. 20. Wykaż, że jeśli $X_1, X_2, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi i $\mathbb{E}X_i = 1$, to ciąg $Z_n := X_1 \cdot \ldots \cdot X_n$ jest martyngałem.

Następnie pokaż, że proces

$$Y_n := \left(\frac{q}{p}\right)^{X_1+\ldots+X_n}$$

jest martyngałem dla i.i.d. zmiennych $X_1, X_2, \ldots$ z rozkładem $\mathrm{P}(X_i = 1) = p, \quad \mathrm{P}(X_i = -1) = q = 1 - p$.

Zad. 21. Udowodnij, że

$$X_t := \mathrm{e}^{N_t - at}$$

jest submartyngałem dla $a \leq \lambda(\mathrm{e} - 1)$ i supermartyngałem dla $a \geq \lambda(\mathrm{e} - 1)$.

Zad. 22. **T** Niech Z_n oznacza rozmiar n-tej generacji w pewnej populacji o ustalonej wartości początkowej Z_0, $X_{n,i}$ będzie zmienną losową oznaczającą liczbę dzieci jednostki i po okresie n czasu, tzn. każda jednostka i w okresie n zostaje zastąpiona $X_{n,i}$ jednostkami w okresie $n+1$. Zmienne $X_{n,i}$ tworzą ciąg i.i.d. dla $i \in \{1, \ldots, Z_n\}$. Pokaż, że Z_n/m^n,$n \geq 1$ jest martyngałem dla $m = \mathbb{E}X_{n,i}$.

Zad. 23. Niech X_i będzie ciągiem i.i.d. ze średnią 0 i wariancją σ^2. Oznaczmy $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$ i

$$Z_n := S_n^2 - n\sigma^2.$$

Udowodnij, że Z_n jest martyngałem.

Zad. 24. Załóżmy, że X_t i Y_t są martyngałami względem filtracji $\mathcal{F}_t$. Czy poniższe procesy są martyngałami względem tej samej filtracji $\mathcal{F}_t$, gdzie

a) $W_t = X_t + Y_t$?

b) $Z_t = X_t Y_t$ pod warunkiem $\mathbb{E}[X_t^2], \mathbb{E}[Y_t^2] < \infty$?

Zad. 25. **T** Rozważ te same przykłady co powyżej, tj $W_t = X_t + Y_t$ oraz $Z_t = X_t Y_t$ jednak gdzie X_t oraz Y_t są martyngałami względem swoich naturalnych filtracji. Czy W, Z są martyngałami względem swoich filtracji naturalnych?

Zad. 26. **T** Rozważmy rzut monetą, w którym prawdopodobieństwo wypadnięcia reszki wynosi p. Znajdź wartość oczekiwaną liczby rzutów potrzebnych aby pojawił się ciąg ROROROR, gdzie R oznacza reszkę a O - orła.

Zad. 27. **T** Załózmy, że gracz wygrywa lub przegrywa 1 z jednakowym prawdopodobieństwem. Załóżmy, że gracz kończy grę jeśli wygra A lub przegra B ($A > 0$, $B > 0$). Pokaż, że średnia liczba rzutów do tego momentu wynosi AB.

Zad. 28. Rozpatrz grę hazardową, w której wygrywasz lub przegrywasz z prawdopodobieństwem 1/2. Kiedy przegrywasz tracisz wszystko, kiedy wygrywasz uzyskujesz podwojenie swojej stawki. Pokaż, że przy strategii każdorazowego stawiania całego akutalnego kapitału wartość twojego portfela jest martyngałem.

Zad. 29. **T** (Urna Pólya'ego) Urna zawiera 1 kulę czarną i 1 białą. W kolejnych momentach czasu losujemy 1 kulę z urny i zwracamy ją wraz z dodatkową kulą tego samego koloru. Po czasie n mamy w urnie $n + 2$ kule, z czego $B_n + 1$ jest białych. Niech

$$M_n := \frac{B_n + 1}{n + 2}$$

będzie proporcją kul białych do całości. Wykaż, ze ciąg M_n jest martyngałem.

Zad. 30. Udowodnij, że

$$Z_t := (N_t - \lambda t)^2 - \lambda t$$

jest martyngałem.

Zad. 31. **T** Na płaszczyźnie siedzi mucha w punkcie $(0, 3)$, przy czym pierwsza współrzędna oznacza czas, a druga położenie. Mucha przechodzi w kolejnych momentach czasu o 2 w górę lub 1 w dół, z prawdopodobieństwami $\frac{1}{2}$. Oblicz prawdopodobieństwo, że mucha kiedykolwiek znajdzie się w położeniu zerowym.

Zad. 32. Pokaż, że każde dwa nierozróżnialne procesy są swoimi modyfikacjami, a każde dwie wzajemne modyfikacje mają te same rozkłady skończenie wymiarowe.

Zad. 33. **T** Podaj przykład procesów, które są wzajemnymi modyfikacjami, ale nie są nierozróżnialne.

Ruch Browna Standardowym ruchem Browna/procesem Wienera nazywamy proces jednoznacznie wyznaczony przez poniższe cztery własności:

1. $B_0 = 0$,
2. proces B ma niezależne i stacjonarne przyrosty,
3. dla każdego t proces ma rozkład normalny $B_t \sim \mathcal{N}(0, t)$,
4. proces B ma trajektorie ciągłe.

Zad. 34. Niech $\mathcal{F}_t^B$ będzie naturalną filtracją ruchu Browna. Sprawdź, czy procesy $X_t = B_t, Y_t = B_{t+1}, Z_t = B_{t-1}, t \geq 1$ są martyngałami względem $\mathcal{F}^B$. Co z filtracjami $\mathcal{F}^Y, \mathcal{F}^Z$?

Zad. 35. Znajdź rozkłady skończenie wymiarowe ruchu Browna.

Zad. 36. Jaki jest rozkład $B_s + B_t$ dla $s \leq t$?

Zad. 37. Niech Y będzie zmienną losową o dystrybuancie F_Y. Definujemy proces $X_t = Y + t$. Znajdź jego rozkłady skończenie wymiarowe, średnią $\mathbb{E}X_t$ i funkcję kowariancji $\mathrm{Cov}(X_t, X_s)$ i wyraź je za pomocą F_Y.

Zad. 38. **T** Niech $\alpha > 0$. Podaj przykład procesu prawostronnie ciągłego X, który nie jest ciągły i spełnia

$$\mathbb{E}|X_t - X_s|^\alpha \leq K|t - s|$$

dla pewnego K i wszystkich $t, s \geq 0$.

Zad. 39. Udowodnij, że dla procesu stacjonarnego mamy

$$R(s, t) := \mathrm{Cov}(X_t, X_s) = R(0, t - s) =: R(t - s), \qquad t \geq s.$$

Zad. 40. Niech B_t^1 i B_t^2 będą dwoma niezależnymi ruchami Browna. Znajdź wszystkie a dla których proces $X_t = aB_t^1 + B_{at}^2$ jest standardowym ruchem Browna.

Zad. 41. Znajdź funkcję kowariancji procesu

$$X_t := B_t - tB_1$$

dla dowolnego $t \geq 0$. Dla $0 \leq t \leq 1$ jest to jedna z możliwych reprezentacji tzw. *mostu Browna*.

Zad. 42. Proces X_t ma niezależne przyrosty oraz $\mathbb{E}X_t = 0$ oraz $\mathrm{Var}X_t = \sqrt{t+1}$. Oblicz $\mathrm{Cov}(X_t, X_s)$. Czy istnieje funkcja $f(t)$ taka, że $(X_t)^2 + f(t)$ jest martyngałem względem naturalnej filtracji procesu X?

Zad. 43. Znajdź funkcję kowariancji następujących procesów:

a) $X_t = \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} B_{\mathrm{e}^t}$;

b) $Y_t = \cos(Gt + U)$, gdzie G ma rozkład Cauchy'ego z parametrem skali 1 zaś U ma rozkład jednostajny na $\mathcal{U}(0, \pi)$ i są to zmienne niezależne;

c) $D(-1)^{N_t}$, gdzie D jest zmienną losową z rozkładem $\mathrm{P}(D = 1) = \mathrm{P}(D = -1) = \frac{1}{2}$ zaś N_t jest niezależnym procesem Poissona z intensywnością $\lambda = 1/2$.

Jak wyglądają trajektorie tych procesów, czy są podobne?

Zad. 44. **T** Udowodnij,że $\tau_x := \inf\{t \geq 0 \colon B_t = x\}$ jest czasem zatrzymania.

Zad. 45. Udowodnij, że rodzina $\mathcal{F}_\tau$ związana z czasem zatrzymania τ jest σ-ciałem.

Zad. 46. Niech σ i τ będą czasami zatrzymania względem filtracji $\mathcal{F}_t$. Udowodnij, że $\sigma \wedge \tau$ jest też czasem zatrzymania i podaj filtrację generowaną przez ten czas zatrzymania w języku $\mathcal{F}_\sigma$ oraz $\mathcal{F}_\tau$.

Zad. 47. **T** Przypuśćmy, że X całkowalną zmienną losową oraz $\mathcal{F}_t$ jest filtracją. Udowodnij, że $M_t = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_t]$ jest jednostajnie całkowalnym martyngałem.

Zad. 48. Przypuśćmy, że M jest martyngałem, zaś f jest funkcją wypukłą taką, że $\mathbb{E}|f(M_t)| < \infty$ dla wszystkich $t \geq 0$. Udowodnij, że $f(M)$ jest submartyngałem. Czy twierdzenie pozostaje prawdziwe dla submartyngału M i rosnącej, wypukłej funkcji f?

Zad. 49. Udowodnij, że

$$(\mathrm{e}^{B_t} - K)^+$$

jest submartyngałem, gdzie $K > 0$ jest ustaloną stałą.

Zad. 50. **T** Niech $\tau := \inf\{t \geq 0 \colon B_t \neq [a, b]\}$. Udowodnij, że $\mathrm{P}(\tau < \infty) = 1$ i $\{B_{t\wedge\tau}), t \geq 0\}$ jest jednostajnie całkowalnym martyngałem.

Zad. 51. Udowodnij, że $M_t := (B_t - a)(b - B_t) + t$ jest martyngałem.

Zad. 52. **T** Udowodnij, że dla $a \neq 0$ wykładniczy martyngał $M_t := \exp\big(aB_t - a^2t/2\big)$ zbiega do 0 a.s. gdy $t \to \infty$. Wywnioskuj z tego, że ten martyngał nie jest jednostajnie całkowalny.

Zad. 53. **T** Niech $\tau_x^+ := \inf\{t \geq 0\colon B_t + ct = x\}$. Udowodnij, że

$$\mathbb{E}\, \mathrm{e}^{-\lambda\tau_x^+} = \exp\{-x(\sqrt{c^2+2\lambda} - c)\}$$

i stąd

$$\mathrm{P}(\tau_x^+ \in \mathrm{d}t)/\mathrm{d}t = \frac{x}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left\{-\frac{(x-ct)^2}{2t}\right\}.$$

Zad. 54. **T** Udowodnij, że

$$\mathrm{P}(\tau_x^+ < \infty) = \begin{cases} 1 & c \geq 0 \\ e^{2cx} & c < 0. \end{cases}$$

Wywnioskuj, że $\sup_{t\geq 0}(B_t - \frac{1}{2}at)$ ma rozkład wykładniczy z parametrem $a > 0$.

Zad. 55. **T** Udowodnij, że dla każdego $t \geq 0$ i $\lambda > 0$ mamy

$$\mathrm{P}\left(\sup_{s\leq t} B_s \geq \lambda\right) \leq \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{t}}$$

oraz

$$\mathrm{P}\left(\sup_{s\leq t} |B_s| \geq \lambda\right) \leq 2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{t}}.$$

Zad. 56. Udowodnij, że następujące transformacje zachowują ruch Browna:

a) $\{-B_t, t \geq 0\}$;

b) dla dowolnego ustalonego $a \geq 0$, $\{B(t+a) - B(a), t \geq 0\}$;

c) dla dowolnego ustalonego $c \neq 0$, $\{cB\left(\frac{t}{c^2}\right), t \geq 0\}$;

d)

$$\tilde{B}_t = \begin{cases} 0 & t = 0 \\ tB\left(\frac{1}{t}\right) & t > 0. \end{cases}$$

Zad. 57. Udowodnij prawo iterowanego logarytmu (LIL) dla $t \to \pm\infty$ i $\liminf_{t\downarrow 0}$ używając LIL dla $\limsup_{t\downarrow 0}$.

Zad. 58. Udowodnij, że kwadratowe wahanie ruchu Browna $\langle B \rangle_t$ jest równe t, to znaczy, że dla zagnieżdżonego podziału $0 = t_0^n \leq t_1 \leq \ldots \leq t_{k_n}^n = t$ ze średnicą $\max_k |t_k^n - t_{k-1}^n|$ zmierzającą do 0 dla $n \to \infty$ mamy

$$\sum_k \left(B(t_k^n) - B(t_{k-1}^n)\right)^2 \xrightarrow{L^2} t$$

gdy $n \to \infty$.

(**T**) Udowodnij też zbieżność a.s.

Zad. 59. **T** Udowodnij, że $\max_{s \leq t} B_s - B_t$ ma taki sam rozkład jak $|B_t|$. Znajdź gęstość prawdopodobieństwa przejścia $|B_t|$.

Zad. 60. **T** Definiujemy geometryczny ruch Browna poprzez

$$Y_t = \mathrm{e}^{B_t}.$$

Znajdź współczynniki dyfuzji tego procesu:

$$\mu(y) := \lim_{h \downarrow 0} \frac{\mathbb{E}[Y_{t+h} - Y_t | Y_t = y]}{h}$$

oraz

$$\sigma^2(y) := \lim_{h \downarrow 0} \frac{\mathbb{E}[(Y_{t+h} - Y_t)^2 | Y_t = y]}{h}.$$

Zad. 61. Załóżmy, że mam jedną akcje, której cena jest równa ruchowi Browna. Kupiliśmy tę akcję z ceną równą $b+c$ gdzie $c > 0$ a obecna cena wynosi b. Planujemy sprzedać tę akcję jeśli osiągnie ona z powrotem cenę $b+c$ o ile zdarzy się to przed czasem t. Jakie jest prawdopodobieństwo, że nie stracimy na tej inwestycji?

Procesy Markowa Proces X należy do klasy procesów Markowa, jeżeli dla $s \leq t$ oraz dowolnej ciągłej i ograniczonej funkcji, $f \in \mathcal{C}_b$,

$$\mathbb{E}[f(X_t)|\mathcal{F}_s^X] = \mathbb{E}[f(X_t)|X_s],$$

co jest równoważne stwierdzeniu, że rozkłady warunkowe $X_t|\mathcal{F}_s^X$ oraz $X_t|X_s$ są identyczne. Warunkową gęstość zmiennej $X_t|X_s = x$ nazywamy prawdopodobieństwem przejścia $p_{s,t}(x,y)$. Kiedy zależy ono tylko od różnicy czasów mówimy o jednorodnym procesie Markowa.

Jednorodne Markowa są jednoznacznie scharakteryzowane przez ich półgrupę przejścia

$$\mathcal{P}_t f(x) := \mathbb{E}_x[f(X_t)] := \mathbb{E}[f(X_t)|X_0 = x]$$

oraz generator

$$\mathcal{A}f(x) := \lim_{t \downarrow 0} \frac{\mathcal{P}_t f(x) - f(x)}{t}$$

określony dla funkcji, dla których powyższa granica jest zbieżna.

Zad. 62. Udowodnij, że gęstość prawdopodobieństwa przejścia ruchu Browna jest równa

$$p_t(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{2t}\right\}.$$

Zad. 63. Udowodnij, że gęstość prawdopodobieństwa przejścia ruchu Browna spełnia równania Chapmana-Kolmogorowa.

Zad. 64. Niech $Y_t = tN_t$. czy proces Y_t ma niezależne przyrosty? Czy jest procesem Markowa? Znajdź jego funkcję kowariancji.

Zad. 65. Niech $p_t(x,y)$ będzie gęstością przejścia procesu Markowa X_t. Znajdź $\mathrm{P}(X_s < X_t)$ dla $s < t$.

Zad. 66. Tzw. *proces śmierci* jest zadany jako $X_t = 0$ gdy $X_0 = 0$ oraz

$$X_t := \begin{cases} 1, & t < T \\ 0, & t \geq T. \end{cases}$$

gdy $X_0 = 1$. Czas T jest zmienną losową z rozkładu wykładniczego. Pokaż, że to jednorodny proces Markowa. Oblicz jego generator.

Zad. 67. Udowodnij, że infinitezymalny generator ruchu Browna $B_t + x$ jest równy

$$\mathcal{A}f(x) = \frac{1}{2} f''(x).$$

Na jakiej dziedzinie jest on zdefiniowany?

Uwaga: Możesz założyć, że jest to dopuszczalne, ale zwróć uwagę na wchodzenie z granicą pod całkę/wartość oczekiwaną w przeliczeniu.

(**T**) Pokaż ściśle, że można zamienić kolejność obliczania granicy i wartości oczekiwanej.

Zad. 68. **T** Znajdź infinitezymalny generator d-wymiarowego ruchu Browna $\mathbf{B}_t + x$.

Zad. 69. **T** Niech **B** będzie d-wymiarowym ruchem Browna jak wyżej. Proces $X_t = |\mathbf{B}_t + x|^2$ jest nazywany kwadratowym procesem Bessla rzędu d. Znajdź jego infinitezymalny generator.

Zad. 70. **T** Niech B będzie ruchem Browna, f mierzalną funkcją, q nieujemną, ograniczoną i mierzalną funkcją oraz $\lambda > 0$. Udowodnij, że funkcja

$$u(x) = \mathbb{E}_x \int_0^\infty f(B_t) e^{-\lambda t - \int_0^t q(B_s)\, ds}\, dt$$

spełnia następujące równanie różniczkowe

$$(\lambda + q)u - \frac{1}{2}u'' = f.$$

Zad. 71. **T** Używajac powyższego rezultatu udowodnij prawo arcusa-sinusa dla ruchu Browna B. To znaczy, udowodnij, że dla każdego $t > 0$ zmienna losowa

$$\int_0^t \mathbf{1}_{(0,\infty)}(B_s)\, ds$$

ma rozkład z gęstością

$$\frac{1}{\pi\sqrt{s(t-s)}}$$

na $(0, t)$.

Zad. 72. Niech

$$X_t = x(-1)^{N_t}, \quad x \in \{-1, 1\}.$$

Pokaż, że to jednorodny proces Markowa. Oblicz jego generator.

Zad. 73. Niech X_t będzie dyfuzją z generatorem

$$\mathcal{A}f(x) = af''(x) + bf'(x).$$

Dla $\varphi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ z definicji generatora znajdź generator dyfuzji $\tilde{X}_t = \varphi(X_t)$.

Zad. 74. **T** Niech gęstość prawdopodobieństwa przejścia $p_t(x)$ pewnej dyfuzji X ze stałym dryfem μ i zmiennością $\sigma > 0$ spełnia równanie Fokkera-Plancka:

$$\partial_t p_t(x) = \overline{\mathcal{A}} p_t(x) = -b\partial_x p_t(x) + \frac{1}{2}\sigma^2 \partial_{xx} p_t(x)$$

z warunkami brzegowymi $p_t(0) = 0$ i $p_0(x) = \delta(x - x_0)$ dla ustalonego x_0 gdzie $\delta(x - x_0)$ jest deltą Diraca. Znajdź $p_t(x)$.

Zad. 75. Przypomnijmy, że gęstość rozkładu stacjonarnego π procesu X podanego w poprzednim zadaniu spełnia następujące równanie

$$\overline{\mathcal{A}}\pi(x) = 0.$$

Znajdź ten rozkład.

Zad. 76. **T** Znajdź gęstość rozkładu stacjonarnego dla procesu Ornsteina-Uhlenbecka korzystając z

$$\overline{\mathcal{A}}\pi = \partial_x\big(bx\pi(x)\big) + \frac{1}{2}\sigma^2 \partial_{xx}\pi(x).$$

Zad. 77. Które z poniżej podanych procesów są gaussowskie:

$$B_t,\ |B_t|,\ t^2 B_{5t} + 3,\ N_t,\ B_t B_1?$$

Zad. 78. Niech $H \in (0, 1)$. Przypomnijmy, że proces gaussowski X_t jest nazywany ułamkowym ruchem Browna (fBM) z parametrem Hursta H jeśli $\mathbb{E}[X_t] = 0$ i

$$\mathbb{E}[X_t X_s] = \frac{1}{2}\left(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t - s|^{2H}\right), \qquad s, t \geq 0.$$

Używając własności samopodobieństwa i kryterium Kołmogorowa udowodnij, że fBM ma ciągłe trajektorie.

Procesy Lévy'ego Mówimy, że proces X należy do klasy procesów Lévy'ego, o ile spełnia poniższe 3 własności:

1. $X_0 = 0$,
2. ma niezależne i stacjonarne przyrosty,
3. ma trajektorie *càdlàg*.

Każdy proces Lévy'ego jest jednoznacznie wyznaczony przez swój wykładnik Laplace'a

$$\varphi(\theta) := \frac{1}{t} \ln \mathbb{E}\, \mathrm{e}^{\theta X_t} = \ln \mathbb{E}\, \mathrm{e}^{\theta X_1}.$$

Zad. 79. Pokaż, że każdy proces Lévy'ego jest jednorodnym procesem Markowa.

Zad. 80. Udowodnij, że proces

$$M_t := \mathrm{e}^{\theta X_t - \varphi(\theta) t}$$

jest martyngałem dla procesu Lévy'ego X z wykładnikiem Laplace'a φ

Zad. 81. Sprawdź, że proces $X_t := \sigma B_t + N_t + \mu t$ dla niezależnych B, N jest procesem Lévy'ego. Znajdź jego wykładnik Laplace'a.

Zad. 82. Znajdź wykładnik Laplace'a procesu

$$X_t := pt - \sum_{i=1}^{N_t} U_i,$$

gdzie N jest procesem Poissona zaś $(U_i)_i$ jest niezależnym od N ciągiem i.i.d. zmiennych losowych o funkcji generującej momenty ψ_U.